KUNGL TEKNISKA HÖGSKOLAN

Institutionen för Matematik
Avdelningen för Optimeringslära och systemteori

Tentamen i 5B1816 Tillämpad matematisk programmering—ickelinjära problem.
Torsdagen den 7 mars 2002 kl. 14.00–19.00.

Examinator: Anders Forsgren, tel 790 71 27

Tillåtna hjälpmedel: Penna, linjal och radergummi samt av institutionen utlånad miniräknare.

Lösningsmetoder: Om ej annat anges i texten skall problemen lösas med systematiska metoder, som ej blir orimliga vid stora problem. Motivera dina slutsatser ordentligt. Om du använder andra metoder än de som lärts ut i kursen måste du förklara mycket noga.

OBS! Personnummer skall anges på försättsbladet. Endast en uppgift på varje blad. Numrera sidorna och skriv namn på varje blad!

12 poäng ger säkert godkänt.

---

1. Denna uppgift består av fem delfrågor, där du på varje delfråga antingen ska svara ja, svara nej eller avstå från att svara. Korrekt svar ger en poäng, felaktigt svar ger minus en poäng, inget svar ger noll poäng. Blir totalsumman negativ får du noll poäng. Observera att *endast* svaren beaktas på denna uppgift.

(a) Betrakta problemet

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{då} & g(x) \geq 0, \\ & x \in I\!R^n, \end{array}$$

där f och g_i, $i = 1, \ldots, m$, är två gånger kontinuerligt differentierbara. Antag att x^* är en lokal minpunkt till problemet sådan att $g(x^*) > 0$. Gäller då garanterat att $\nabla f(x^*) = 0$? .... (1p)

(b) Antag att x^* är en lokal minpunkt till problemet

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{då} & Ax = b, \\ & x \in I\!R^n, \end{array}$$

där f är två gånger kontinuerligt differentierbar. Måste då $Z^T \nabla^2 f(x^*) Z$ vara positivt definit, där Z är en matris vars kolumner bildar bas för nollrummet till A? .... (1p)

(c) Antag att man använder en "active set"-metod för att lösa problemet

$$(P) \qquad \begin{array}{ll} \min & \frac{1}{2} x^T H x + c^T x \\ \text{då} & Ax \geq b, \end{array}$$

där H är en positivt definit symmetrisk matris. Om $x^{(0)}$ väljs så att $Ax^{(0)} > b$ och det dessutom gäller att optimalpunkten x^* uppfyller $Ax^* > b$, hittar man då garanterat lösningen i en iteration? .... (1p)

(d) Betrakta ett semidefinit programmeringsproblem på standardform,

$$\begin{array}{ll} \min & \operatorname{trace}(CX) \\ \text{då} & \operatorname{trace}(A_i X) = b_i, \quad i = 1, \dots, m, \\ & X = X^T \succeq 0. \end{array}$$

där C och A_i, $i = 1, \dots, m$, är symmetriska $n \times n$-matriser. Antag att problemet har en väldefinierad barriärtrajektoria $\{X(\mu) : \mu > 0\}$. Gäller garanterat att $X(\mu) \succ 0$ för alla $\mu > 0$? .... (1p)

(e) Antag att man använder steepest-descentmetoden med exakt linjesökning för att lösa problemet

$$(P) \qquad \begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{då} & x \in \mathbb{R}^n, \end{array}$$

där f är två gånger kontinuerligt differentierbar. Antag att metoden konvergerar. Har den då garanterat superlinjär konvergenshastighet? .... (1p)

2. Betrakta det ickelinjära programmeringsroblemet (NLP) definierat av

$$(NLP) \qquad \begin{array}{ll} \min & -2x_1^2 + 2x_1 - \frac{1}{2}x_2^2 - 2x_2 - 8x_3 \\ \text{då} & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 20 = 0, \\ & x_j \geq 0, \ j = 1, 2, 3. \end{array}$$

Låt $\widehat{x} = (0 \ 2 \ 4)^T$.

(a) Använd lämpliga optimalitetsvillkor för att avgöra om $\widehat{x}$ är en lokal minpunkt till (NLP). .... (3p)

(b) Om det ickelinjära bivillkoret ersätts med en linearisering kring $\widehat{x}$ får vi ett ickelinjärt programmeringsproblem på formen

$$(NLP') \qquad \begin{array}{ll} \min & -2x_1^2 + 2x_1 - \frac{1}{2}x_2^2 - 2x_2 - 8x_3 \\ \text{då} & 4x_2 + 8x_3 - 40 = 0, \\ & x_j \geq 0, \ j = 1, 2, 3. \end{array}$$

Använd lämpliga optimalitetsvillkor för att avgöra om $\widehat{x}$ är en lokal minpunkt till (NLP'). .... (2p)

3. Härled uttrycket för den symmetriska rang-1 uppdateringen, C_k, i kvasi-Newton uppdateringen $B_{k+1} = B_k + C_k$. .... (5p)

4. Som bekant är nedanstående problem $(PSDP)$ och $(DSDP)$ ett primal-dualt par av semidefinita programmeringsproblem,

$$(PSDP) \qquad \begin{array}{ll} \min & \operatorname{trace}(CX) \\ \text{då} & \operatorname{trace}(A_i X) = b_i, \quad i = 1, \dots, m, \\ & X = X^T \succeq 0, \end{array}$$

$$
(DSDP) \quad \begin{array}{ll} \max & b^T y \\ \text{då} & \sum_{i=1}^m A_i y_i + S = C, \\ & S = S^T \succeq 0. \end{array}
$$

Din uppgift är att bilda dualen till problemet

$$
(SDP) \quad \begin{array}{ll} \max & b^T y \\ \text{då} & \sum_{i=1}^m A_i y_i + S = C, \\ & y \geq 0, \\ & S = S^T \succeq 0, \end{array}
$$

så att vi får ett primal-dualt par av problem som är analogt med $(PSDP)$ och $(DSDP)$. Skriv ditt resultat på så enkel form som möjligt, dvs eliminera eventuella redundanta bivillkor och/eller variabler. Utnyttja förslagsvis det primal-duala paret ovan. .... (5p)

5. Betrakta det ickelinjära programmeringsroblemet (P) definierat av

$$
(P) \quad \begin{array}{ll} \min & e^{x_1+x_2} + x_1^2 + x_1 x_2 + 2x_2^2 + x_1 \\ \text{då} & 10 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0, \\ & x_2 - 1 \geq 0. \end{array}
$$

Låt $x^{(0)} = (-2 \;\; 2)^T$ och $\lambda^{(0)} = (1 \;\; 2)^T$. (I enlighet med läroboken definierar vi lagrangefunktionen som $\mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) - \lambda^T g(x)$.)

(a) Antag att man vill lösa (P) med hjälp av sekvensiell kvadratisk programmering. Ställ upp det initiala QP-subproblem som behöver lösas för de givna $x^{(0)}$ och $\lambda^{(0)}$. .... (2p)

(b) Antag att man vill lösa det initiala QP-subproblemet som du formulerat i (5a) med en primal-dual inrepunktsmetod. Antag att μ initialt väljs till 1 samt $p = (0 \; 0)^T$ och $\lambda = (1 \; 2)^T$. Ställ upp det initiala linjära ekvationssystemet som behöver lösas i den primal-duala inrepunktsmetoden för dessa initialvärden. .... (2p)

Anmärkning: Slackvariabler behöver inte införas. Om du inför dem, välj då initialvärden på dem så att startpunkten blir tillåten.

(c) Antag att man istället vill lösa (P) med en primal-dual inrepunktsmetod utan att införa slackvariabler. Antag att μ initialt väljs till 1, samt att den givna intialpunkten $x = (-2 \;\; 2)^T$ och $\lambda = (1 \;\; 2)^T$ används. Hur relateras det initiala linjära ekvationssystem som uppstår till det initiala linjära ekvationssystem du ställt upp i (5b)? .... (1p)

Anmärkning: Inga ekvationssystem behöver lösas i denna uppgift.

Lycka till!