KUNGL TEKNISKA HÖGSKOLAN

Institutionen för Matematik
Avdelningen för Optimeringslära och systemteori

Tentamen i 5B1816 Tillämpad matematisk programmering—ickelinjära problem.
Måndagen den 8 april 2002 kl. 8.00–13.00.

Examinator: Anders Forsgren, tel 790 71 27

Tillåtna hjälpmedel: Penna, linjal och radergummi samt av institutionen utlånad miniräknare.

Lösningsmetoder: Om ej annat anges i texten skall problemen lösas med systematiska metoder, som ej blir orimliga vid stora problem. Motivera dina slutsatser ordentligt. Om du använder andra metoder än de som lärts ut i kursen måste du förklara mycket noga.

OBS! Personnummer skall anges på försättsbladet. Endast en uppgift på varje blad. Numrera sidorna och skriv namn på varje blad!

12 poäng ger säkert godkänt.

---

1. Denna uppgift består av fem delfrågor, där du på varje delfråga antingen ska svara ja, svara nej eller avstå från att svara. Korrekt svar ger en poäng, felaktigt svar ger minus en poäng, inget svar ger noll poäng. Blir totalsumman negativ får du noll poäng. Observera att *endast* svaren beaktas på denna uppgift.

(a) Betrakta problemet

$$(P) \qquad \begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{då} & x \in X, \end{array}$$

där X är en konvex mängd i $\mathbb{R}^n$ så att $X \neq \mathbb{R}^n$. Kan man välja funktionen f så att (P) är ett konvext optimeringsproblem, men f är ickekonvex på $\mathbb{R}^n$? ....(1p)

(b) Låt mängden C definieras av

$$C = \left\{ X \in \mathbb{R}^{n\times n} : \ X = X^T \preceq 0, \ \mathrm{Trace}(A_i X) = b_i, \ i = 1, \dots, m \right\}$$

där A_i, $i = 1, \dots, m$, är symmetriska $n \times n$-matriser och $b \in \mathbb{R}^m$. Är då C en konvex mängd? ....(1p)

(c) Antag att vi vill använda en kvasi-Newtonmetod för att lösa

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{då} & x \in \mathbb{R}^n, \end{array}$$

där f är två gånger kontinuerligt differentierbar. Antag att det i iteration k gäller att $\nabla f(x_k) \neq 0$ och att Hessianapproximationen B_k är symmetrisk och positivt definit. Blir då sökriktningen garanterat en descentriktning? ....(1p)

(d) Antag att konjugerade gradientmetoden används för att lösa ekvationssystemet $Ax = b$, där $A = A^T \succ 0$. Låt $\{p_j\}$ beteckna sökriktningarna. Gäller då garanterat att $p_i^T A p_j = 0$ för $i \neq j$? ....(1p)

(e) Betrakta problemet

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{då} & g(x) = 0, \\ & x \in \mathbb{R}^n, \end{array}$$

där f och g_i, $i = 1, \ldots, m$, är två gånger kontinuerligt differentierbara. Antag att x^* tillsammans med en lagrangemultiplikatorvektor λ^* uppfyller första ordningens nödvändiga optimalitetsvillkor. Antag dessutom att $\nabla^2_{xx}\mathcal{L}(x^*, \lambda^*) \succ 0$. Är då x^* garanterat en lokal minpunkt till problemet? .... (1p)

2. Betrakta problemet (P) definierat av

$$(P) \qquad \begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{då} & x \in \mathbb{R}^n, \end{array}$$

där f är två gånger kontinuerligt deriverbar. (Vi har alltså inga bivillkor i problemet.)

(a) Hur lyder definitionen av att x^* är en lokal optimalpunkt till (P)? ...... (1p)

(b) Hur lyder definitionen av att x^* är en global optimalpunkt till (P)? ..... (1p)

(c) Antag att f är konvex på $\mathbb{R}^n$, och att x^* är en lokal optimalpunkt till (P). Visa att x^* då är en global optimalpunkt till (P). .... (3p)

3. Betrakta det ickelinjära programmeringsproblemet (NLP) definierat av

$$(NLP) \qquad \begin{array}{ll} \min & e^{x_1} + x_1x_2 + x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2 \\ \text{då} & -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 10 \geq 0, \\ & a^Tx - b \geq 0, \end{array}$$

där $a \in \mathbb{R}^3$ och $b \in \mathbb{R}$ är givna konstanter. Låt $\widetilde{x} = (0\ 0\ 1)^T$.

(a) Bestäm a och b så att $\widetilde{x}$ uppfyller första ordningens nödvändiga optimalitetsvillkor till (NLP). .... (3p)

(b) För de värden på a och b som du bestämt i (3a), avgör om $\widetilde{x}$ är en lokal minpunkt till (NLP). .... (2p)

4. Betrakta det ickelinjära matematiska programmeringsproblemet

$$(NLP) \qquad \begin{array}{ll} \min & \frac{1}{2}(x_1+1)^2 + \frac{1}{2}(x_2+1)^2 \\ \text{då} & -3(x_1+x_2-2)^2 - (x_1-2x_2)^2 + 4 \geq 0, \\ & 4x_2 - 1 \geq 0. \end{array}$$

Du har fått en utskrift från en SQP-lösare för detta problem. Som startpunkt har valts $x = (0\ 0)^T$ och $\lambda = (1\ 1)^T$. Sex iterationer, utan linjesökning, har utförts. Utskriften innehåller följande data:

It	x_1	x_2	λ_1	λ_2	$\|\nabla_x \mathcal{L}(x,\lambda)\|$	$g_1(x)$	$g_2(x)$
0	0	0	1	1	18.601	-8	-1
1	0.41667	0.25	0.4375	0.083333	3.2544	-1.3403	0
2	0.51822	0.31664	0.23657	0	0.29702	-0.085876	0.26657
3	0.51739	0.33071	0.21084	0	0.0050547	-0.0013648	0.32284
4	0.51676	0.33164	0.21058	0	$3.11 \cdot 10^{-6}$	$-6.42 \cdot 10^{-6}$	0.32655
5	0.51676	0.33164	0.21058	0	$2.44 \cdot 10^{-12}$	$-7.42 \cdot 10^{-12}$	0.32656
6	0.51676	0.33164	0.21058	0	$4.44 \cdot 10^{-16}$	$-8.88 \cdot 10^{-16}$	0.32656

(a) Ställ upp det första QP-problemet. Verifiera att lösningen till detta QP-problem som ges av utskriften ovan är korrekt. .... (3p)

Anmärkning: På bråkform är resultatet från första iterationen $x = (5/12\ 1/4)^T$ och $\lambda = (7/16\ 1/12)^T$.

(b) Bestäm, så bra som möjligt, vad för slags punkt SQP-lösaren ovan konvergerar mot. .... (2p)

Anmärkning: I enlighet med bokens konvention definierar vi lagrangefunktionen $\mathcal{L}(x,\lambda)$ enligt $\mathcal{L}(x,\lambda) = f(x) - \lambda^T g(x)$, där $f(x)$ är målfunktionen och $g(x)$ är bivillkorsfunktionen för bivillkoren skrivna på formen $g(x) \geq 0$.

5. Betrakta det semidefinita programmeringsproblemet

$$
(PSDP) \qquad \begin{array}{ll} \min & \operatorname{trace}(MX) \\ \text{då} & \operatorname{trace}(X) = 1, \\ & X = X^T \succeq 0, \end{array}
$$

där M är en given symmetrisk $n \times n$-matris.

(a) Ställ upp det duala problemet $(DSDP)$ som svarar mot $(PSDP)$. .... (2p)

(b) Uttryck optimalvärdet till $(DSDP)$ på så enkel form som möjligt. .... (1p)

(c) Visa att $(PSDP)$ har en optimallösning av rang ett, dvs en optimallösning på formen xx^T, där x är en n-dimensionell vektor. .... (2p)

Lycka till!