KTH Matematik

Tentamen i 5B1816 Tillämpad matematisk programmering—ickelinjära problem
Tisdagen den 9 mars 2004 kl. 14.00–19.00

Examinator: Anders Forsgren, tel. 790 71 27.

Tillåtna hjälpmedel: Penna, linjal och radergummi samt av institutionen utlånad miniräknare.

Lösningsmetoder: Om ej annat anges i texten skall problemen lösas med systematiska metoder, som ej blir orimliga vid stora problem. Motivera dina slutsatser ordentligt. Om du använder andra metoder än de som lärts ut i kursen måste du förklara mycket noga.

OBS! Personnummer skall anges på försättsbladet. Endast en uppgift på varje blad. Numrera sidorna och skriv namn på varje blad!

12 poäng ger säkert godkänt.

---

1. Denna uppgift består av fem delfrågor, där du på varje delfråga antingen ska svara ja, svara nej eller avstå från att svara. Korrekt svar ger en poäng, felaktigt svar ger minus en poäng, utelämnat svar ger noll poäng. Blir totalsumman negativ får du noll poäng. Observera att *endast* svaren beaktas på denna uppgift.

(a) För en given $m \times n$-matris A av rang m och en given vektor c i $\mathbb{R}^n$, betrakta minstakvadratproblemen

$$(P_1) \quad \begin{array}{ll} \min & \|A^T y - c\|_2^2 \\ \text{då} & y \in \mathbb{R}^m, \end{array} \qquad \text{och} \qquad (P_2) \quad \begin{array}{ll} \min & \|A^T y - c\|_2^2 \\ \text{då} & y \geq 0, \; y \in \mathbb{R}^m. \end{array}$$

Gäller garanterat att $\text{optval}(P_1) \leq \text{optval}(P_2)$, där $\text{optval}(P_i)$, $i = 1, 2$, betecknar respektive problems optimalvärde. .... (1p)

(b) Betrakta det kvadratiska programmeringsproblemet (QP) definierat av

$$(QP) \qquad \begin{array}{ll} \min & \frac{1}{2} x^T H x + c^T x \\ \text{då} & Ax \geq b, \end{array}$$

där $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $H = H^T$, $c \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$. Är (QP) garanterat ett konvext optimeringsproblem? .... (1p)

(c) Låt M vara en symmetrisk $m \times m$-matris. Gäller då garanterat att $Ix - M \succeq 0$ om x är större än eller lika med största egenvärdet till M? .... (1p)

(d) Antag att H är en symmetrisk $n \times n$-matris med m positiva egenvärden $(1 < m < n)$. Kan vi då garanterat hitta en $n \times m$-matris Z med linjärt oberoende kolumner så att $Z^T H Z$ blir positivt definit? .... (1p)

(e) Antag att x^* är en lokal minpunkt till det ickelinjära programmeringsproblemet

$$(NLP) \qquad \begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{då} & x \geq 0, \end{array}$$

där $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ är två gånger kontinuerligt deriverbar. Gäller det då garanterat att $\nabla f(x^*) \geq 0$, $x^* \geq 0$, samt $x_j^* \cdot \frac{\partial f(x^*)}{\partial x_j} = 0$, $j = 1, \ldots, n$? .... (1p)

2. Betrakta det kvadratiska programmeringsproblemet (QP) definierat av

$$(QP) \qquad \begin{array}{ll} \min & \frac{1}{2}x^T H x + c^T x \\ \text{då} & Ax \geq b, \end{array}$$

där

$$H = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \ c = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -8 \end{pmatrix}, \ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \ b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Lös (QP) med en active-set metod. Starta i punkten $(0\ 1\ 0)^T$ med bivillkor 1 och 3 i den aktiva mängden. .... (5p)

3. Betrakta NLP-problemet (P) definierat av

$$(P) \qquad \begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{då} & g_i(x) \geq 0, \quad i = 1, \ldots, m, \\ & x \in I\!R^n, \end{array}$$

där f och g är två gånger kontinuerligt deriverbara.

En reguljär punkt x^* till bivillkoren är, som bekant, en punkt x^* sådan att $\nabla g_i(x^*)$, $i \in \{l : g_l(x^*) = 0\}$, är linjärt oberoende.

(a) Formulera andra ordningens nödvändiga villkor för att en reguljär punkt x^* ska vara en lokal optimalpunkt till (P). .... (2p)

(b) För det specialfall då $g(x) = Ax - b$, bevisa första ordningens nödvändiga villkor för att en reguljär punkt x^* ska vara en lokal optimalpunkt till (P). ..... (3p)

4. Betrakta det kvadratiska programmeringsproblemet (QP) definierat av

$$(QP) \qquad \begin{array}{ll} \min & \frac{1}{2}x^T H x + c^T x \\ \text{då} & Ax \geq b, \end{array}$$

där

$$H = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \ c = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ b = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Ställ upp det ickelinjära ekvationssystem vars lösning ger den primal-duala trajektorian $x(\mu)$ och $\lambda(\mu)$ till (QP) för ett givet μ. Ställ upp den allmänna formen för ett givet μ. Verifiera sedan att

$$x(0.01) \approx \begin{pmatrix} 0.0096 \\ 0.9995 \\ 1.9959 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \lambda(0.01) \approx \begin{pmatrix} 1.9833 \\ 1.0365 \\ 0.0100 \\ 0.0050 \end{pmatrix}.$$

.... (2p)

(b) Baserat på svaret i (4a), gör en kvalificerad gissning av vilka bivillkor som är aktiva i optimallösningen till (QP). .... (1p)

(c) Verifiera gissningen från (4b) genom att lösa det linjära ekvationssystem som ger lösningen för de valda aktiva bivillkoren. .... (2p)

Ledning: Det kan underlätta lösandet av ditt linjära ekvationssystem att veta att såväl optimallösning som lagrangemultiplikatorer är heltaliga i (QP).

5. Betrakta det ickelinjära programmeringsproblemet

$$(NLP) \quad \begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{då} & g_i(x) \geq 0, \quad i = 1, \ldots, 4, \\ & x \in I\!R^2, \end{array}$$

där $f : I\!R^2 \to I\!R$ och $g : I\!R^2 \to I\!R^4$ är två gånger kontinuerligt deriverbara. Dessutom är f och $-g_3$ konvexa funktioner på $I\!R^2$.

Antag att vi vill lösa (NLP) med hjälp av sekvensiell kvadratisk programmering. Antag speciellt att vi startar i punkten $x^{(0)} = (0\ 0)^T$ där

$$f(x^{(0)}) = 0, \qquad \nabla f(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}^T, \qquad \nabla^2 f(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$g_1(x^{(0)}) = 1, \qquad \nabla g_1(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}^T, \qquad \nabla^2 g_1(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix},$$

$$g_2(x^{(0)}) = 2, \qquad \nabla g_2(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}^T, \qquad \nabla^2 g_2(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$g_3(x^{(0)}) = 0, \qquad \nabla g_3(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}^T, \qquad \nabla^2 g_3(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$g_4(x^{(0)}) = 3, \qquad \nabla g_4(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix}^T, \qquad \nabla^2 g_4(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Antag också att initiala uppskattningen av lagrangemultiplikatorerna, $\lambda^{(0)}$, väljs till $\lambda^{(0)} = (0\ 2\ 1\ 0)^T$.

(a) Du har fått förslag att SQP-subproblemet ska ge nästa iterationspunkt $x^{(1)} = (0\ 0)^T$ och $\lambda^{(1)} = (-1\ 1\ 2\ 0)^T$. Förklara, utan att genomföra några beräkningar, varför det inte kan stämma. .... (1p)

(b) Lös (NLP) med sekvensiell kvadratisk programmering utgående från $x^{(0)}$ och $\lambda^{(0)}$. (Vi antar att ingen linjesökning behöver utföras.) Det eller de kvadratiska programmeringsproblem som uppstår får lösas på valfritt sätt som inte behöver vara systematiskt, exempelvis grafiskt. .... (3p)

(c) Bestäm, så bra som möjligt, vilken typ av optimalpunkt du fått fram. ... (1p)

Anmärkning: I enlighet med bokens notation väljs tecknet på λ så att $\mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) - \lambda^T g(x)$.

Lycka till!