KTH Matematik

Tentamen i 5B1816 Tillämpad matematisk programmering—ickelinjära problem
Fredagen den 26 augusti 2005 kl. 8.00–13.00

Examinator: Anders Forsgren, tel. 790 71 27.

Tillåtna hjälpmedel: Penna, linjal och radergummi samt av institutionen utlånad miniräknare.

Lösningsmetoder: Om ej annat anges i texten skall problemen lösas med systematiska metoder, som ej blir orimliga vid stora problem. Motivera dina slutsatser ordentligt. Om du använder andra metoder än de som lärts ut i kursen måste du förklara mycket noga.

OBS! Personnummer skall anges på försättsbladet. Endast en uppgift på varje blad. Numrera sidorna och skriv namn på varje blad!

12 poäng ger säkert godkänt.

---

1. Denna uppgift består av fem delfrågor, där du på varje delfråga antingen ska svara ja, svara nej eller avstå från att svara. Korrekt svar ger en poäng, felaktigt svar ger minus en poäng, utelämnat svar ger noll poäng. Blir totalsumman negativ får du noll poäng. Observera att *endast* svaren beaktas på denna uppgift.

(a) Antag att man använder en "active set"-metod för att lösa problemet

$$(P) \qquad \begin{array}{ll} \min & \frac{1}{2}x^T H x + c^T x \\ \text{då} & Ax \geq b, \end{array}$$

där H är en positivt definit kvadratisk matris. Om $x^{(0)}$ väljs så att $Ax^{(0)} > b$ och det dessutom gäller att optimalpunkten x^* uppfyller $Ax^* > b$, hittar man då garanterat lösningen i en iteration? . . . . (1p)

(b) Låt $f : I\!R^n \to I\!R$ vara två gånger kontinuerligt deriverbar med $\nabla^2 f(x)$ positivt definit för alla $x \in I\!R^n$. Antag att man vill minimera f med Newtons metod och beräknar Newton-riktningen p i en viss punkt $x^{(0)}$. Är $x^{(0)}$ garanterat en global minpunkt om $p = 0$? . . . . (1p)

(c) Låt $b \in I\!R^n$. Löser steepest-descent metoden (med exakt linjesökning) garanterat problemet

$$\min \ \tfrac{1}{2}x^T x + b^T x$$

i en iteration för godtycklig startpunkt? . . . . (1p)

(d) Antag att H är en indefinit symmetrisk $n \times n$-matris med p negativa egenvärden, och antag vidare att Z är en $n \times m$-matris med linjärt oberoende kolumner, där $m < p$. Kan då $Z^T H Z$ vara positivt definit? . . . . (1p)

(e) Antag att man använder en SQP-metod för att lösa problemet

$$(P) \qquad \begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{då} & g(x) \geq 0, \end{array}$$

där f och g_i, $i = 1, \ldots, m$, är oändligt kontinuerligt deriverbara funktioner. Om startpunkten x_0 väljs så att $g(x_0) > 0$, gäller det då alltid att samtliga iterationspunkter x_k, $k \geq 1$, är tillåtna till (P)? . . . . (1p)

2. Betrakta det ickelinjära programmeringsproblemet (NLP) definierat av

$$
(NLP) \qquad \begin{array}{ll} \min & \alpha x_1^4 + x_1 x_3 - x_2^2 + x_1 - 3x_3 \\ \text{då} & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \le 3, \\ & 0 \le x_j \le 6, \quad j = 1, 2, 3, \end{array}
$$

där α är en skalär. Kan α väljas så att $(1\ 1\ 1)^T$ blir en lokal minpunkt till (NLP)? Bestäm i så fall alla sådana värden på α. ....(5p)

3. Betrakta QP-problemet (QP) definierat av

$$
(QP) \qquad \begin{array}{ll} \min & x_1^2 + x_2^2 \\ \text{då} & 2x_1 + x_2 \ge 4, \\ & x_1 \ge 1, \\ & x_2 \ge 0. \end{array}
$$

Problemet kan illustreras geometriskt i nedanstående figur,

Lös (QP) med en active-set metod. Starta i punkten $x = (1.5\ 3.5)^T$. Du behöver inte räkna ut några exakta numeriska värden, utan kan utnyttja att problemet är tvådimensionellt, och göra en rent geometrisk lösning. Illustrera dina iterationer i figuren som finns längst bak. Motivera varje steg ordentligt. ....(5p)

4. Betrakta det semidefinita programmeringsproblemet (P) givet av

$$
(P) \qquad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & G(x) \succeq 0, \end{array}
$$

där $G(x) = \sum_{j=1}^{n} A_j x_j - B$ för B och A_j, $j = 1, \dots, n$, symmetriska $m \times m$-matriser. Det tillhörande duala problemet ges av

$$(D) \quad \begin{array}{ll} \max & \operatorname{trace}(BY) \\ \text{då} & \operatorname{trace}(A_j Y) = c_j, \quad j = 1, \dots, n, \\ & Y = Y^T \succeq 0. \end{array}$$

En barriärtransformation av (P) ger för en fix positiv barriärparameter μ problemet

$$(P_\mu) \qquad \min \quad c^T x - \mu \ln(\det(G(x))).$$

(a) Visa att första ordningens nödvändiga optimalitetsvillkor för (P_μ) är ekvivalenta med ekvationssystemet

$$\begin{aligned} c_j - \operatorname{trace}(A_j Y) &= 0, \quad j = 1, \dots, n, \\ G(x)Y - \mu I &= 0, \end{aligned}$$

förutsatt att $G(x) \succ 0$ och $Y \succ 0$ hålls implicit. .... (2p)

(b) Visa att en lösning $x(\mu)$ och $Y(\mu)$ till ekvationssystemet, sådan att $G(x(\mu)) \succ 0$ och $Y(\mu) \succ 0$, är tillåten till (P) respektive (D) med dualitetsgap $m\mu$. .. (3p)

Anmärkning: För en symmetrisk matris M används ovan $M \succ 0$ respektive $M \succeq 0$ för att beteckna att M är positivt definit respektive positivt semidefinit. Du kan utan bevis använda dig av relationerna

$$\frac{\partial \ln(\det(G(x)))}{\partial x_j} = \operatorname{trace}(A_j G(x)^{-1}) \quad \text{för} \quad j = 1, \dots, n.$$

5. Betrakta det ickelinjära programmeringsproblemet (NLP) definierat av

$$(NLP) \quad \begin{array}{ll} \min & 24 \ln x_1 + x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 \\ \text{då} & x_1 \geq 1. \end{array}$$

Låt $x^{(0)} = (2\ 2)^T$ och $\lambda^{(0)} = 0$. (I enlighet med läroboken definierar vi lagrangefunktionen som $\mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) - \lambda^T g(x)$.)

Antag att man vill lösa (NLP) med hjälp av sekvensiell kvadratisk programmering, utgående från de givna $x^{(0)}$ och $\lambda^{(0)}$.

(a) Ställ upp det kvadratiska programmeringsproblemet som uppstår i första iterationspunkten. Visa att detta problem inte är konvext. .... (2p)

(b) Föreslå ett lämpligt modifierat konvext QP-problem för första iterationen. Lös QP-problemet med valfri metod, som inte behöver vara systematisk. Din strategi för modifikation ska vara sådan att den ska kunna användas för att få en SQP-metod att konvergera mot punkter som uppfyller första ordningens nödvändiga optimalitetsvillkor. .... (3p)

Lycka till!

Namn: . . . . Personnummer: . . . . Blad nummer: . . . .