KTH Matematik

Tentamen i 5B1816 Tillämpad matematisk programmering—ickelinjära problem
Tisdagen den 20 december 2005 kl. 14.00–19.00

Examinator: Anders Forsgren, tel. 790 71 27.

Tillåtna hjälpmedel: Penna, linjal och radergummi samt av institutionen utlånad miniräknare.

Lösningsmetoder: Om ej annat anges i texten skall problemen lösas med systematiska metoder, som ej blir orimliga vid stora problem. Motivera dina slutsatser ordentligt. Om du använder andra metoder än de som lärts ut i kursen måste du förklara mycket noga.

OBS! Personnummer skall anges på försättsbladet. Endast en uppgift på varje blad. Numrera sidorna och skriv namn på varje blad!

12 poäng ger säkert godkänt.

---

1. Denna uppgift består av fem delfrågor, där du på varje delfråga antingen ska svara ja, svara nej eller avstå från att svara. Korrekt svar ger en poäng, felaktigt svar ger minus en poäng, utelämnat svar ger noll poäng. Blir totalsumman negativ får du noll poäng. Observera att *endast* svaren beaktas på denna uppgift.

(a) Låt $M = \{x \in I\!R^n : G(x) \succeq 0\}$, där $G(x) = \sum_{j=1}^n A_j x_j - B$ för B och A_j, $j = 1, \dots, n$, symmetriska $m \times m$-matriser. Är M garanterat en konvex mängd? . . . (1p)

(b) Betrakta problemet

$$(P) \qquad \begin{array}{ll} \min & \frac{1}{3}x^3 \\ \text{då} & x \geq 0, \quad x \in I\!R. \end{array}$$

Är $x(\mu) = \mu^3$ lösningen till det barriärtransformerade problemet som hör till (P), förutsatt att en logaritmisk barriärtransformation används? . . . (1p)

(c) Antag att vi vill lösa optimeringsproblemet

$$(P) \quad \min \ f(x)$$

där f är en två gånger kontinuerligt deriverbar funktion på $I\!R^n$. Om $\widehat{x}$ är en punkt i $I\!R^n$ sådan att $\nabla^2 f(\widehat{x}) \succ 0$, är $\widehat{x}$ då garanterat en lokal minpunkt till (P)? . . . (1p)

(d) Betrakta NLP-problemet (P) definierat av

$$(P) \qquad \begin{array}{lll} \min & f(x) & \\ \text{då} & g_i(x) \geq 0, & i = 1, \dots, m, \\ & x \in I\!R^n. & \end{array}$$

där f och g är två gånger kontinuerligt deriverbara. Antag att $g(x^*) \geq 0$ och $\nabla^2 f(x^*) \preceq 0$. Kan då x^* vara en lokal minpunkt till (P)? . . . (1p)

(e) Låt $b \in \mathbb{R}^n$ och låt Q vara en ortonormal $n \times n$-matris, dvs $Q^TQ = I$. Gäller då alltid att steepest-descentmetoden (med exakt linjesökning) löser problemet

$$\min \ \tfrac{1}{2}\|Q(x-b)\|_2^2$$

i högst en iteration? .... (1p)

2. Betrakta NLP-problemet (P) definierat av

$$(P) \quad \begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{då} & g_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, m, \\ & x \in \mathbb{R}^n, \end{array}$$

där f och g är två gånger kontinuerligt deriverbara.

En reguljär punkt x^* till bivillkoren är en punkt x^* sådan att $\nabla g_i(x^*)$, $i = 1, \dots, m$, är linjärt oberoende. I en sådan punkt x^* kan tangentplanet $T(x^*)$ uttryckas som

$$T(x^*) = \mathcal{N}(A(x^*)) = \{p : A(x^*)p = 0\}.$$

(a) Formulera och bevisa första ordningens nödvändiga villkor för att en reguljär punkt x^* ska vara en lokal optimalpunkt till (P). .... (3p)

(b) Formulera andra ordningens nödvändiga villkor för att en reguljär punkt x^* ska vara en lokal optimalpunkt till (P). .... (2p)

3. Betrakta det kvadratiska programmeringsproblemet (QP) definierat av

$$(QP) \quad \begin{array}{ll} \min & \tfrac{1}{2}x^THx + c^Tx \\ \text{då} & Ax \geq b, \end{array}$$

där

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ c = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}, \ A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ b = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Låt $\widetilde{x} = (0 \ 1)^T$.

(a) Lös (QP) med en active-set metod. Starta i punkten $\widetilde{x}$ utan bivillkor i den aktiva bivillkorsmängden. Du behöver inte utföra några beräkningar utan kan utnyttja att problemet är litet och illustrera dina iterationer i figuren som finns längst bak. .... (2p)

(b) Lös (QP) med en active-set metod. Starta i punkten $\widetilde{x}$ med bivillkor 4 i den aktiva bivillkorsmängden. Du behöver inte utföra några beräkningar utan kan utnyttja att problemet är litet och illustrera dina iterationer i figuren som finns längst bak. .... (2p)

(c) Verifera (algebraiskt) att den punkt du funnit är globalt optimal till (QP). (1p)

4. Betrakta det ickelinjära programmeringsproblemet (NLP) definierat av

$$(NLP) \qquad \begin{array}{ll} \min & -10x_1 \\ \text{då} & 25 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0, \\ & x_1 \geq 0. \end{array}$$

Antag att man vill lösa (NLP) med hjälp av sekvensiell kvadratisk programmering, utgående från givna startpunkter $x^{(0)}$ och $\lambda^{(0)}$. (I enlighet med läroboken definierar vi lagrangefunktionen som $\mathcal{L}(x,\lambda) = f(x) - \lambda^T g(x)$.)

(a) Låt $x^{(0)} = (3\ 0)^T$ och $\lambda^{(0)} = (1\ 0)^T$. Genomför en SQP-iteration, dvs beräkna $x^{(1)}$ och $\lambda^{(1)}$. .... (2p)

(b) Låt nu $x^{(0)} = (3\ 0)^T$ och $\lambda^{(0)} = (10\ 0)^T$. Genomför återigen en SQP-iteration, dvs beräkna $x^{(1)}$ och $\lambda^{(1)}$ för detta fall. .... (2p)

(c) Om man genomför nästa iteration från de respektive punkterna $x^{(1)}$ och $\lambda^{(1)}$ du räknat ut i (4a) och (4b), kommer ett av de två QP-problemen inte ha alla önskade egenskaper. Förklara hur detta kan åtgärdas. .... (1p)

Anmärkning: De kvadratiska programmeringsproblem som uppstår får lösas på valfritt sätt, som inte behöver vara systematiskt. Steglängd 1 kan användas, ingen linjesökning behöver utföras. I övrigt ska resonemanget vara giltigt på ett generellt problem, trots att (NLP) kan lösas direkt genom inspektion.

5. Betrakta optimeringsproblemet

$$(NLP) \qquad \begin{array}{ll} \min & \frac{x_1^2}{x_2} + x_2 \\ \text{då} & x_1 \geq 5, \\ & x_2 \geq 1. \end{array}$$

(a) Då (NLP) har linjära bivillkor är tillåtna området konvext. Visa att målfunktionen är konvex på det tillåtna området. .... (2p)

(b) Visa att (NLP) är ekvivalent med det semidefinita programmeringsproblemet

$$(SDP) \qquad \begin{array}{ll} \min & x_3 \\ \text{då} & \begin{pmatrix} x_2 & x_1 \\ x_1 & x_3 - x_2 \end{pmatrix} \succeq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ & x_1 \geq 5, \\ & x_2 \geq 1. \end{array}$$

(Det finns en ledning på nästa sida.). .... (3p)

Ledning: Låt M vara en symmetrisk matris som kan partitioneras enligt

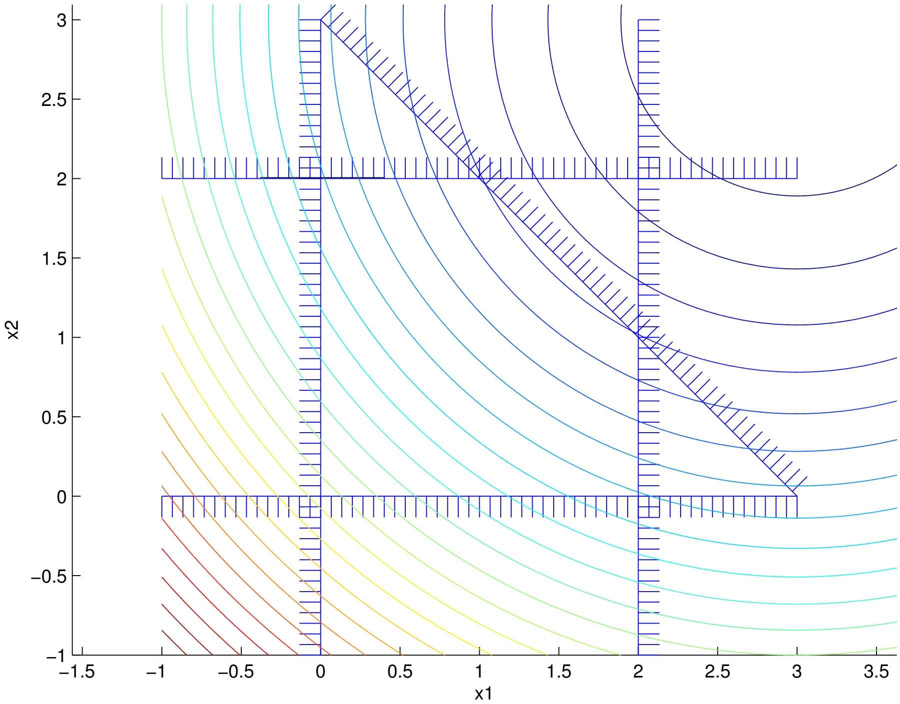
$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ B^T & C \end{pmatrix}, \quad \text{där } A = A^T \succ 0 \text{ och } C = C^T.$$

Då gäller att $M \succeq 0$ om och endast om $C - B^T A^{-1} B \succeq 0$.

Lycka till!

Namn: . . . . Personnummer: . . . . Blad nummer: . . . .

Figur till uppgift 3a:



Figur till uppgift 3b: