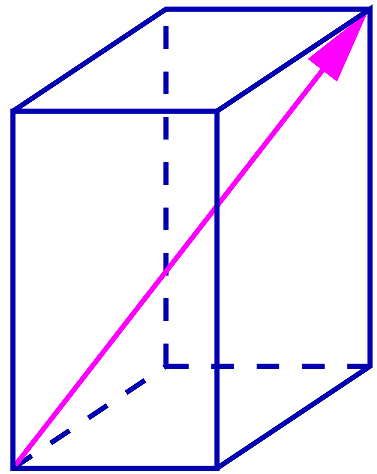
KTH Matematik

5B1817 Tillämpad ickelinjär optimering

Föreläsning 1

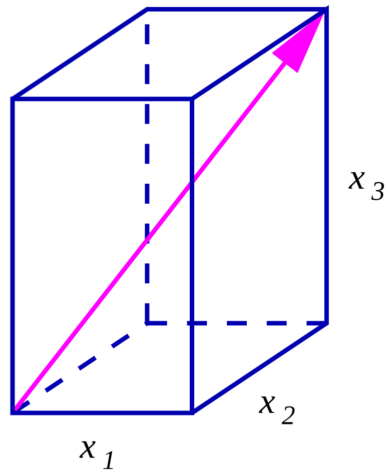
Introduktion till kursen. Ickelinjära optimeringsmodeller.

Exempelproblem



Antag att vi vill konstruera en låda med volym 1 m^3 så att rymddiagonalen blir så liten som möjligt. Hur ser den ut?

Formulering av exempelproblem



Inför variabler x_i, $i = 1, \ldots 3$ enligt figuren. Det ger

$$(P) \qquad \begin{array}{ll} \text{min} & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \\ \text{då} & x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = 1, \\ & x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3. \end{array}$$

Alternativ formulering av exempelproblemet

Vi har formuleringen

$$(P) \qquad \begin{array}{ll} \text{min} & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \\ \text{då} & x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = 1, \\ & x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3. \end{array}$$

Bivillkoren $x_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, 3$, kan bytas mot $x_i > 0$, $i = 1, \ldots, 3$.

Låt $y_i = \ln x_i$, $i = 1, 2, 3$, vilket ger

$$(P') \qquad \begin{array}{ll} \text{min} & e^{2y_1} + e^{2y_2} + e^{2y_3} \\ \text{då} & y_1 + y_2 + y_3 = 0. \end{array}$$

Ickelinjär programmering

Vi studerar *ickelinjära programmeringsproblem* på formen

$$
(NLP) \quad
\begin{array}{lll}
\text{min} & f(x) & \\
\text{då} & g_i(x) \geq 0, \quad i \in \mathcal{I}, & \mathcal{I} \bigcup \mathcal{E} = \{1, \dots, m\}, \\
 & g_i(x) = 0, \quad i \in \mathcal{E}, & \mathcal{I} \bigcap \mathcal{E} = \emptyset, \\
 & x \in I\!\!R^n, &
\end{array}
$$

där f och g_i, $i = 1, \dots, m$, är ickelinjära funktioner från $I\!\!R^n$ till $I\!\!R$.

Funktionerna antas vara tillräckligt många gånger kontinuerligt differentierbara.

Tillåtna området betecknas ofta med F. I vårt fall

$$F = \{x \in I\!\!R^n : g_i(x) \geq 0,\ i \in \mathcal{I},\ g_i(x) = 0,\ i \in \mathcal{E}\}.$$

Global minpunkt och lokal minpunkt

$$(P) \quad \begin{array}{ll} \text{min} & f(x) \\ \text{då} & x \in F. \end{array}$$

Definition. *En punkt* $x^* \in F$ *är en* global minpunkt *till* (P) *om* $f(x^*) \leq f(x)$ *för alla* $x \in F$*.*

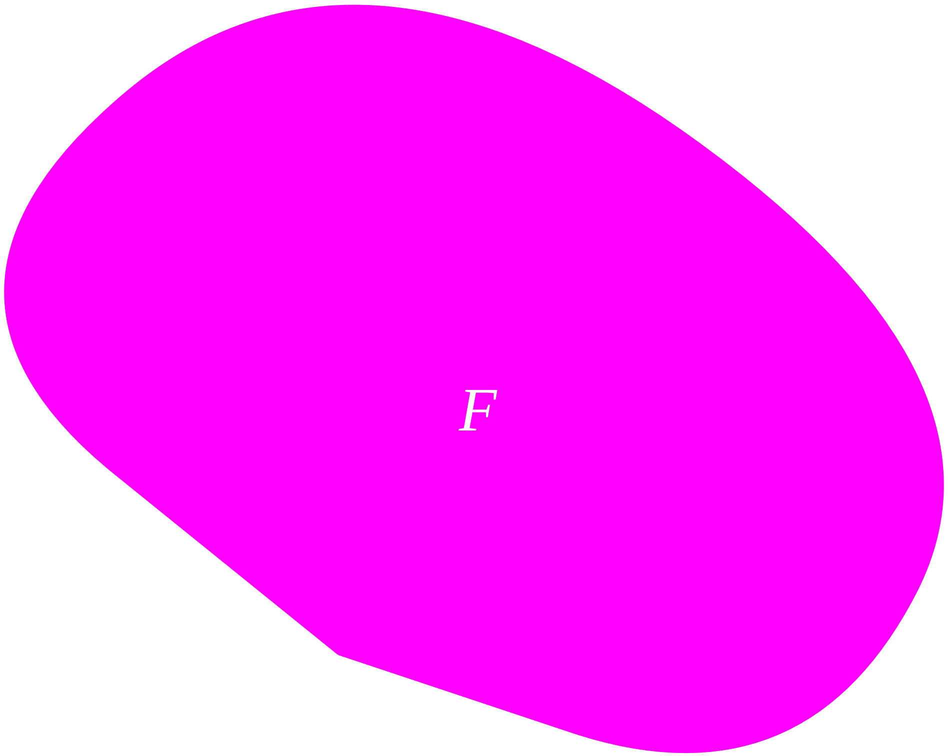
Definition. *En punkt* $x^* \in F$ *är en* lokal minpunkt *till* (P) *om det finns ett* $\epsilon > 0$ *så att* $f(x^*) \leq f(x)$ *för alla* $x \in F$ *som uppfyller* $\|x - x^*\| < \epsilon$*.*

Globala minpunkter är eftersträvansvärda. Ej alltid praktiskt möjligt.

Konvexitet medför att lokala minpunkter blir globala minpunkter.

Konvex mängd

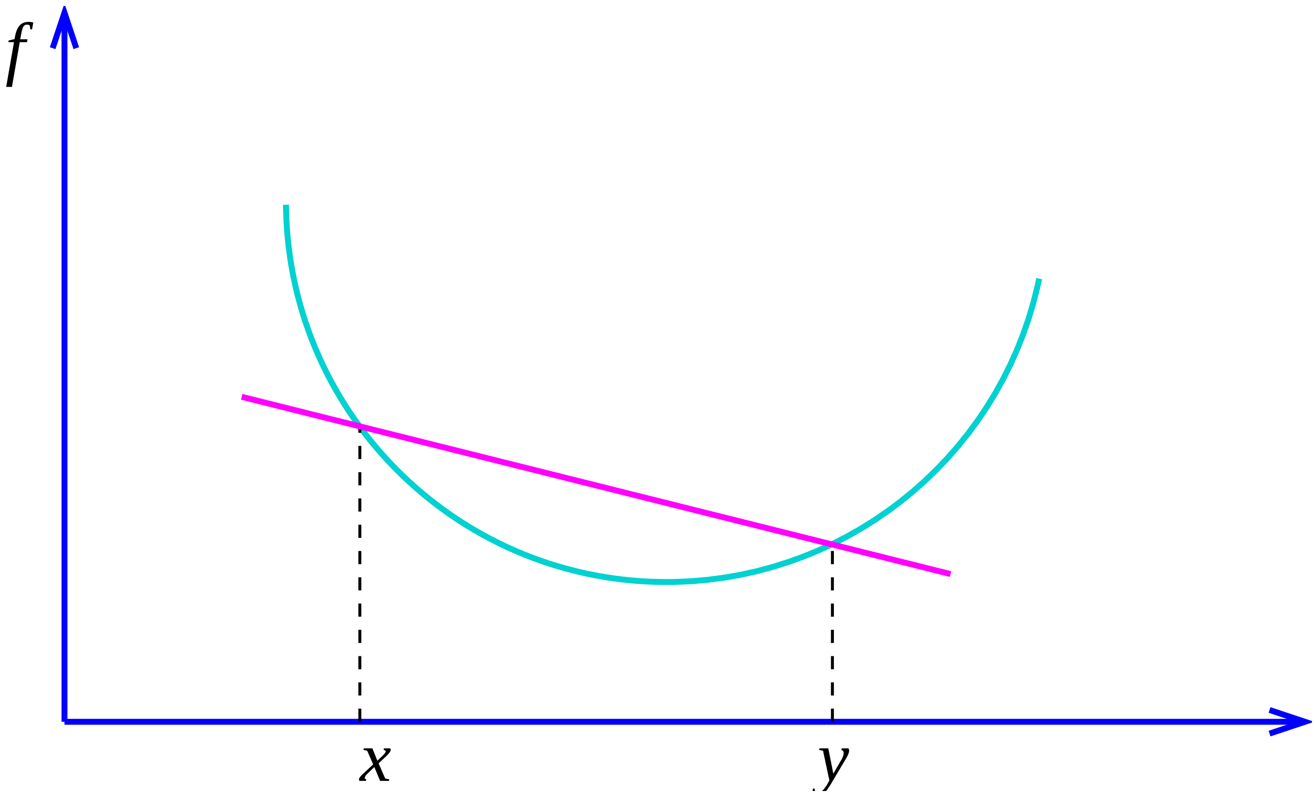
Definition. *En mängd* F *är en* konvex mängd *om* $(1-\alpha)x + \alpha y \in F$ *för alla* $x \in F$, $y \in F$ *och* $\alpha \in [0, 1]$.



Konvex funktion

Definition.

Om F *är en konvex mängd, så är* $f : F \to I\!R$ *en* konvex funktion *på* F *om* $f((1-\alpha)x+\alpha y) \le (1-\alpha)f(x)+\alpha f(y)$ *för alla* $x \in F$, $y \in F$ *och* $\alpha \in [0,1]$.



Konvexitet ger global optimalitet

$$(P) \quad \begin{array}{ll} \text{min} & f(x) \\ \text{då} & x \in F. \end{array}$$

Sats. *Antag att F är en konvex mängd och att f är en konvex funktion på F. Om x^* är en lokal minpunkt till (P), så är den också en global minpunkt till (P).*

Bevis. Antag att $x^* \in F$ inte är en global minpunkt. Då finns ett $y \in F$ så att $f(y) < f(x^*)$. Konvexitet ger

$$(1-\alpha)x + \alpha y \in F \quad \text{och} \quad f((1-\alpha)x + \alpha y) < f(x)$$

för $\alpha \in (0,1)$. Alltså är x^* inte en lokal minpunkt. $\square$

OBS! Konvexitetskrav både på F och f.

Mer om konvexitet

Påstående. *Låt* $F = \{x \in \mathbb{R}^n : g_i(x) \ge 0,\ i \in \mathcal{I},\ g_i(x) = 0,\ i \in \mathcal{E}\}$. *Då är* F *en konvex mängd om* g_i, $i \in \mathcal{I}$, *är konkava funktioner på* $\mathbb{R}^n$ *och* g_i, $i \in \mathcal{E}$, *är affina funktioner på* $\mathbb{R}^n$.

Påstående. *Antag att* F *är en konvex mängd och att* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *uppfyller* $f \in C^1$. *Då är* f *en* konvex funktion *på* F *om och endast om* $f(y) \ge f(x) + \nabla f(x)^T(y - x)$ *för alla* $x \in F$, $y \in F$.

Påstående. *Antag att* F *är en konvex mängd och att* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *uppfyller* $f \in C^2$. *Då är* f *en* konvex funktion *på* F *om och endast om* $(y - x)^T \nabla^2 f(x)(y - x) \ge 0$ *för alla* $x \in F$, $y \in F$.

Corollary. *Antag att* F *är en konvex mängd och att* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *uppfyller* $f \in C^2$. *Då är* f *en* konvex funktion *på* F *om* $\nabla^2 f(x)$ *är positivt semidefinit för alla* $x \in F$.

Ickelinjär programmering är en vid problemklass

Betrakta ett binärt heltalsprogrammeringsproblem (IP) på formen

$$(IP) \qquad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & Ax \geq b, \\ & x_j \in \{0, 1\}, \quad j = 1, \dots, n. \end{array}$$

Problem (IP) kan ekvivalent formuleras som

$$(NLP) \qquad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & Ax \geq b, \\ & x_j(1 - x_j) = 0, \quad j = 1, \dots, n. \end{array}$$

Att hitta globalt minimum till (NLP) är dock minst lika svårt.

Kursens fokus

Fokus:

- Modeller. Examination genom projekt.
- Metoder. Examination genom tentamen. Eventuellt projekt 2.

Kurskrav:

- Kursanmälan senast torsdag 2/11. Ange e-postadress.
- Två projektuppgifter godkända under kursens gång. (2p)
- Godkänd skriftlig tentamen. (2p)

Projektuppgifterna

Projekten:

- Självständig del av kursen.
- Grupper om två eller tre personer. Kursledningen bestämmer gruppindelning.
- Projektuppgift 1 är en modelleringsuppgift.
- Projektuppgift 2 är en modelleringsuppgift eller en metoduppgift. Meddela val senast 16/11.
- Modelleringsspråket GAMS används i modelleringsuppgifterna. Introduktionslektion 6/11. Övningsuppgifter finns på nätet.
- Muntlig och skriftlig redovisning.

Projektuppgifterna, forts.

Projektuppgift 1:

- Delas ut 6/11.
- Skriftlig rapport lämnas in senast vid redovisningstillfället 20/11. Obligatorisk närvaro vid detta tillfälle. Några grupper redovisar muntligt här, 20 minuter var.
- Vilka grupper som redovisar anslås en vecka i förväg. Grupper som inte redovisar muntligt ska boka tider för muntlig diskussion med kursledarna, 20 minuter, senast vid lektionstillfället 20/11. Tider finns dagarna efter.

Projektuppgift 2 är analog med redovisningsdatum 4/12.

Modelleringsprojektuppgifterna

Uppgift 1 samt, valfritt, uppgift 2.

- Syftet är att modellera och lösa ett problem utifrån en beskrivning.
- Ger träning i modellering samt förståelse för betydelse av begreppet lösning.

Metodprojektuppgiften

Valfritt, uppgift 2.

- Syftet är att lösa några testproblem med en egenhändigt konstruerad lösare.
- Ökad förståelse för hur metoderna fungerar.

Betygsättning av projektuppgifterna

En projektuppgift består av basuppgifter samt extrauppgifter.

Godkänt betyg ges i gradering 3, 4 och 5.

Nöjaktig behandling av basuppgifterna ger normalt betyg 3.

Nöjaktig behandling av bas- och extrauppgifterna ger normalt betyg 4.

Betygsättning av tentamen

Godkänt betyg ges i gradering 3, 4 och 5.

Slutbetyg

$$\frac{(\text{betyg på proj 1}) + (\text{betyg på proj 2}) + 3 \cdot (\text{betyg på tentamen})}{5},$$

avrundat.