KTH Matematik

5B1817 Tillämpad ickelinjär optimering

Föreläsning 7

Kvadratisk programmering med olikhetsbivillkor
Active-set metoder

Kvadratisk programmering med olikhetsbivillkor

Betrakta kvadratiskt programmeringsproblem

$$(IQP) \quad \begin{array}{ll} \text{min} & \frac{1}{2}x^T H x + c^T x \\ \text{då} & Ax \geq b, \\ & x \in I\!\!R^n. \end{array}$$

Vi antar att $H \succ 0$. Problemet är då konvext.

Tidigare har vi tittat på fallet med likhetsbivillkor.

Nu måste vi bestämma vilka bivillkor som är aktiva i optimum.

Vi kommer att studera två typer av metoder:

- Active-set metoder. ("Hårt" val.)
- Inrepunktsmetoder. ("Mjukt" val.)

Bakgrund till active-set metod

En active-set metod genererar *tillåtna punkter*.

Antag att vi känner en tillåten punkt $\bar{x}$. (Kan fås med LP.)

Gissa att de villkor som är aktiva i $\bar{x}$ också är aktiva i x^*.

Låt $\mathcal{A} = \{l : a_l^T \bar{x} = b_l\}$. Aktiva bivillkoren i $\bar{x}$.

Låt $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{A}$ vara sådan att $A_\mathcal{W}$ har full radrang.

Håll (temporärt) bivillkoren i $\mathcal{W}$ aktiva, dvs lös

$$(EQP_\mathcal{W}) \quad \begin{array}{ll} \text{min} & \frac{1}{2}(\bar{x}+p)^T H(\bar{x}+p) + c^T(\bar{x}+p) \\ \text{då} & A_\mathcal{W} p = 0, \\ & p \in I\!\!R^n. \end{array}$$

Lösning av likhetssubprolementet

Problemet

$$(EQP_\mathcal{W}) \quad \begin{array}{ll} \text{min} & \frac{1}{2}(\bar{x}+p)^T H(\bar{x}+p) + c^T(\bar{x}+p) \\ \text{då} & A_\mathcal{W} p = 0, \\ & p \in I\!\!R^n. \end{array}$$

har, enligt förra föreläsningen, optimallösning p^* och tillhörande multiplikatorvektor $\lambda_\mathcal{W}^*$ som ges av

$$\begin{pmatrix} H & A_\mathcal{W}^T \\ A_\mathcal{W} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^* \\ -\lambda_\mathcal{W}^* \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} H\bar{x} + c \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Optimalt x^* som motsvarar $(EQP_\mathcal{W})$ ges av $x^* = \bar{x} + p^*$.

Vad har vi bortsett från?

Då vi har löst $(EQP_{\mathcal{W}})$ istället för (IQP) har vi bortsett från två saker:

1. Vi har bortsett från alla inaktiva bivillkor, dvs vi måste kräva $a_i^T x \ge b_i$ för $i \notin \mathcal{W}$.
2. Vi har bortsett från att de aktiva bivillkoren är olikheter, dvs vi har ansatt $A_{\mathcal{W}} x = b_{\mathcal{W}}$ istället för $A_{\mathcal{W}} x \ge b_{\mathcal{W}}$.

Hur inkluderar vi dessa krav?

Inkludera de inaktiva bivillkoren

Vi har utgående från $\bar{x}$ räknat ut sökriktningen p^*.

Om $A(\bar{x}+p^*) \ge b$ uppfyller $\bar{x}+p^*$ alla bivillkor.

Annars kan vi räkna ut maximala steglängden $\alpha_{\max}$ så att $A(\bar{x}+\alpha_{\max}p^*) \ge b$ gäller.

Villkoret blir $\alpha_{\max} = \min\limits_{i:a_i^T p^* < 0} \dfrac{a_i^T \bar{x} - b_i}{-a_i^T p^*}$.

Två fall:

- $\alpha_{\max} \ge 1$. Vi kan låta $\widetilde{x} \leftarrow \bar{x}+p^*$.
- $\alpha_{\max} < 1$. Vi kan låta $\widetilde{x} \leftarrow \bar{x}+\alpha_{\max}p^*$ och $\mathcal{W} \leftarrow \mathcal{W} \bigcup \{l\}$, där $a_l^T(\bar{x}+\alpha_{\max}p^*) = b_l$.

Punkten $\bar{x}+p^*$ är intressant då $\alpha_{\max} \ge 1$.

Inkludera olikhetskravet

Här förutsätter vi att $\alpha_{\max} \ge 1$, dvs $A\widetilde{x} \ge b$, där $\widetilde{x} = \bar{x}+p^*$.

Då vi löst $(EQP_{\mathcal{W}})$ har vi fått p^* och $\lambda_{\mathcal{W}}^*$. Två fall:

- $\lambda_{\mathcal{W}}^* \ge 0$. I så fall är $\widetilde{x}$ optimallösning till

$$(IQP_{\mathcal{W}}) \quad \begin{array}{ll} \min & \frac{1}{2}x^T H x + c^T x \\ \text{då} & A_{\mathcal{W}} x \ge b_{\mathcal{W}}, \quad x \in I\!R^n, \end{array}$$

  och därmed också optimallösning till (IQP).

- $\lambda_k^* < 0$ för något k. Om $A_{\mathcal{W}} p = e_k$ gäller att $(H\widetilde{x}+c)^T p = {\lambda_{\mathcal{W}}^*}^T A_{\mathcal{W}} p = \lambda_k^* < 0$. Låt därför $\mathcal{W} \leftarrow \mathcal{W} \backslash \{k\}$.

En iteration i en active-set metod för att lösa (IQP)

Givet tillåten $\bar{x}$ och $\mathcal{W}$ sådan att $A_{\mathcal{W}}$ har full radrang och $A_{\mathcal{W}}\bar{x} = b_{\mathcal{W}}$.

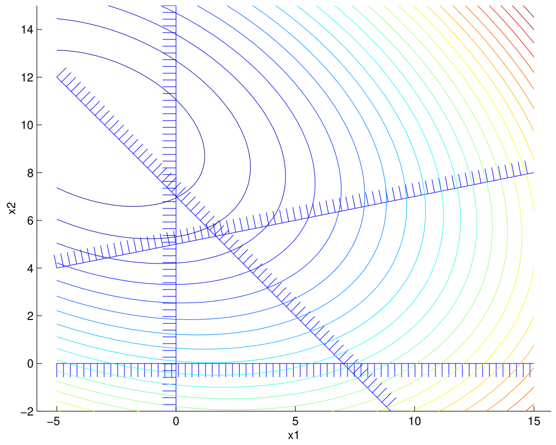
- Lös $\begin{pmatrix} H & A_{\mathcal{W}}^T \\ A_{\mathcal{W}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^* \\ -\lambda_{\mathcal{W}}^* \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} H\bar{x}+c \\ 0 \end{pmatrix}$.
- $l \leftarrow$ index för bivillkor som först blir otillåtet längs p^*.
- $\alpha_{\max} \leftarrow$ maximala steglängden längs p^*.
- Om $\alpha_{\max} < 1$, låt $\bar{x} \leftarrow \bar{x}+\alpha_{\max}p^*$ och $\mathcal{W} \leftarrow \mathcal{W} \bigcup \{l\}$. Ny iteration.
- Annars, $\alpha_{\max} \ge 1$. Låt $\bar{x} \leftarrow \bar{x}+p^*$.
- Om $\lambda_{\mathcal{W}}^* \ge 0$ är $\bar{x}$ optimal. Klar!
- Annars, $\lambda_k^* < 0$ för något k. Låt $\mathcal{W} \leftarrow \mathcal{W} \backslash \{k\}$. Ny iteration.

Exempelproblem

Betrakta följande tvådimensionella exempelproblem.

$$\begin{array}{ll} \min & x_1^2 + x_1x_2 + 2x_2^2 - 3x_1 - 36x_2 \\ \text{då} & x_1 \geq 0, \\ & x_2 \geq 0, \\ & -x_1 - x_2 \geq -7, \\ & x_1 - 5x_2 \geq -25. \end{array}$$

Geometrisk illustration av exempelproblemet



Optimallösning till exempelproblemet

Antag att vi vill lösa exempelproblemet med active-set metod.

Startpunkt $x = (5\ 0)^T$.

Vi kan initialt välja $\mathcal{W} = \{2\}$ eller $\mathcal{W} = \{0\}$.

Optimallösning $x^* = \begin{pmatrix} \frac{15}{32} & 5\frac{3}{32} \end{pmatrix}^T$ med $\lambda^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 3\frac{1}{32} \end{pmatrix}^T$.

Kommentarer till active-set metod för kvadratisk programmering

Active-set metod för kvadratisk programmering:

- "Billiga" iterationer. Endast ett bivillkor läggs till eller dras ifrån $\mathcal{W}$.
- $A_{\mathcal{W}}$ bibehåller full radrang.
- Rättfram modifikation till fallet $H \succeq 0$. (För $H = 0$ får vi simplexmetoden om startpunkten är en extrempunkt.)
- Kan kräva exponentiellt antal iterationer.
- Kan cykla (i teorin). Anticyklingsstrategi som i simplexmetoden.
- Kan "varmstartas" effektivt om startpunkten har "nästan rätt" aktiva bivillkor.

Att hitta en tillåten punkt

Antag att $\bar{x}$ inte är tillåten. Vi kan då exempelvis lösa

$$
(LP) \quad \begin{array}{ll} \text{min} & t \\ \text{då} & Ap + et \ge -(A\bar{x} - b), \\ & t \ge 0, \\ & p \in I\!R^n, \; t \in I\!R. \end{array}
$$

Active-set metod för linjärprogrammering

Antag att $H = 0$, dvs problemet är

$$
(LP) \quad \begin{array}{ll} \text{min} & c^T x \\ \text{då} & Ax \ge b, \quad x \in I\!R^n. \end{array}
$$

Vi kan lösa $\begin{pmatrix} \bar{H} & A_{\mathcal{W}}^T \\ A_{\mathcal{W}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{p} \\ -\bar{\lambda}_{\mathcal{W}} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}$, där $\bar{H}$ uppfyller $Z_{\mathcal{W}}^T \bar{H} Z_{\mathcal{W}} \succ 0$, för matris $Z_{\mathcal{W}}$ vars kolumner bildar bas i null$(A_{\mathcal{W}})$.

Önskad steglängd längs $\bar{p}$ är oändlig, dvs α_{max} ger steglängden.

Simplexmetoden baseras på kvadratisk $A_{\mathcal{W}}$. I varje iteration släpps ett bivillkor, l, och läggs till ett bivillkor, k.