KTH Matematik

Tentamen i 5B1817 Tillämpad ickelinjär optimering
Onsdagen den 20 december 2006 kl. 14.00–19.00
Kortfattade lösningsförslag

---

1. Vi kan partitionera A enligt $A = (B\ N)$, där B består av den första kolumnen i A. En matris Z vars kolumner formar en bas för nullrummet till A kan då fås enligt

$$Z = \begin{pmatrix} -B^{-1}N \\ I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Målfunktionen kan nu uttryckas som

$$\tfrac{1}{2}(x_0 + Zv)^T H(x_0 + Zv).$$

Minimerande v ges alltså av $Z^T H(x_0 + Zv) = 0$. Insatta värden ger

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Lösningen är $v = (1\ 1)^T$. Insättning ger

$$x = x_0 + Zv = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Då x är optimal ska det finnas λ som löser det överbestämda ekvationssystemet $Hx + c = A^T\lambda$. Insättning ger

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \lambda,$$

dvs $\lambda = 1$.

2. Vi har

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad g(x) = \begin{pmatrix} x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 66 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

$$A(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 4x_2 & 6x_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \nabla^2_{xx}\mathcal{L}(x,\lambda) = \begin{pmatrix} -2\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -4\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -6\lambda \end{pmatrix}.$$

(a) Punkten $x^{(1)}$ är en tillåten reguljär punkt där bivillkor 1, 2 och 4 är aktiva. Om $x^{(1)}$ ska vara en lokal minpunkt måste det finnas $\lambda_1^{(1)}$, $\lambda_2^{(1)}$ och $\lambda_4^{(1)}$, där $\lambda_2^{(1)} \geq 0$ och $\lambda_4^{(1)} \geq 0$, så att

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4\sqrt{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^{(1)} \\ \lambda_2^{(1)} \\ \lambda_4^{(1)} \end{pmatrix}.$$

Här blir $\lambda_2^{(1)} = \lambda_4^{(1)} = -1 < 0$, varför $x^{(1)}$ inte är en lokal minpunkt.

Punkten $x^{(2)}$ är en tillåten reguljär punkt där bivillkor 1 är aktivt. Om $x^{(1)}$ ska vara en lokal minpunkt måste det finnas $\lambda_1^{(2)}$ så att

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 12 \end{pmatrix} \lambda_1^{(2)}.$$

Här finns lösning för $\lambda_1^{(2)} = -1/12$, varför $x^{(2)}$ uppfyller första ordningens nödvändiga optimalitetsvillkor.

Vi ser också att $\nabla^2_{xx}\mathcal{L}(x^{(2)}, \lambda^{(2)})$ är en diagonalmatrix med positiva diagonalelement. Alltså är $\nabla^2_{xx}\mathcal{L}(x^{(2)}, \lambda^{(2)})$ positivt definit, vilket medför att reducerade Hessianen till lagrangefunktionen också blir positivt definit i $x^{(2)}$, $\lambda^{(2)}$. Då inga olikhetsbivillkor är aktiva, är andra ordningens tillräckliga optimalitetsvillkor uppfyllda. Alltså är $x^{(2)}$ en lokal minpunkt.

(b) Vi ser att första ordningens nödvändiga optimalitetsvillkor skulle vara uppfyllda i $x^{(2)}$ om problemet relaxeras genom att bivillkoret $x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 66 = 0$ ersätts av $-x_1^2 - 2x_2^2 - 3x_3^2 + 66 \geq 0$. Vi får då $\lambda_1^{(2)} = 1/12 > 0$. Dessutom blir det resulterande problemet konvext, då målfunktionen är konvex på $I\!R^3$ och bivillkorsfunktionen för olikhetsbivillkoret är konkav på $I\!R^3$. Därmed blir första ordningens nödvändiga optimalitetsvillkor tillräckliga för global optimalitet för det relaxerade problemet och $x^{(2)}$ är globalt optimal till det relaxerade problemet. Då $x^{(2)}$ är tillåten till ursprungsproblemet med samma målfunktionsvärde som i relaxerade problemet blir $x^{(2)}$ globalt optimal även till (NLP).

3. QP-subproblemet blir

$$\begin{array}{ll} \min & \frac{1}{2}p^T\nabla^2_{xx}\mathcal{L}(x^{(0)}, \lambda^{(0)})p + \nabla f(x^{(0)})^T p \\ \text{då} & \nabla g_1(x^{(0)})\ p = -g_1(x^{(0)}), \\ & \nabla g_2(x^{(0)})\ p \geq -g_2(x^{(0)}). \end{array}$$

Insättning av numeriska värden ger QP-problemet

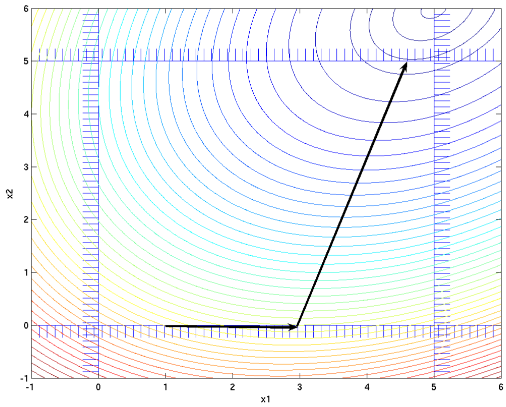
$$\begin{array}{ll} \min & \frac{1}{2}p_1^2 + \frac{1}{2}p_2^2 + p_1 \\ \text{då} & p_1 + p_2 = 0, \\ & p_2 \geq 1. \end{array}$$

Vi kan eliminera p_1 ur $p_1 + p_2 = 0$. Kvar blir att minimera $p_2^2 - p_2$ då $p_2 \geq 1$. Optimallösning blir $p_2 = 1$, vilket ger $p_1 = -1$. Multiplikatorerna fås ur

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \lambda_1 - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \lambda_2,$$

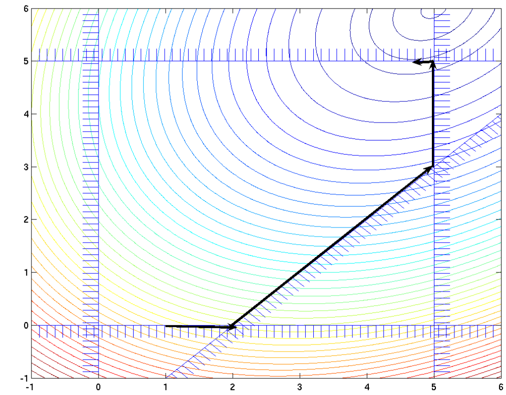
vilket ger $\lambda_1 = 0$ och $\lambda_2 = 1$. Alltså får vi $x^{(1)} = x^{(0)} + p^{(0)} = (-1\ 1)^T$ och $\lambda^{(1)} = (0\ 1)^T$.

4. (a) Iterationsförloppet illustreras i nedanstående figur:



I första iterationen pekar sökriktningen på $(3\ 0)^T$, som är tillåten. Det lönar sig nu att släppa bivillkoret $x_2 \geq 0$, då dess lagrangemultiplikator är negativ. I andra iterationen pekar sökriktningen på $(5\ 6)^T$ men begränsas av bivillkoret $x_2 \leq 5$, vilket läggs till. Ny iteratonspunkt är $(14/3\ 5)^T$. Då det bivillkor vi slår i är parallellt med det vi släppte blir sökriktningen nollvektorn. Multiplikatorn är positiv och vi har hittat en optimalpunkt.

(b) Iterationsförloppet illustreras i nedanstående figur:



I första iterationen pekar sökriktningen på $(3\ 0)^T$, men begränsas av $x_2 - x_1 \geq -2$, som blir aktivt. Ny iteratonspunkt är $(2\ 0)^T$. Sökriktningen blir nollvektorn och det lönar sig att släppa bivillkoret $x_2 \geq 0$, då dess lagrangemultiplikator är negativ. Sökriktningen begränsas nu av bivillkoret $-x_1 \geq -5$, vilket läggs till. Ny iteratonspunkt är $(5\ 3)^T$. Sökriktningen blir nollvektorn, och det lönar sig nu att släppa bivillkoret $x_2 - x_1 \geq -2$, vilket har negativ lagrangemultiplikator. Sökriktningen begränsas nu av bivillkoret $-x_2 \geq -5$, vilket läggs till. Ny iteratonspunkt är $(5\ 5)^T$. Sökriktningen blir nollvektorn, och det lönar sig nu att släppa bivillkoret $-x_1 \geq -5$, då dess lagrangemultiplikator är negativ. Sökriktningen pekar på $(14/3\ 5)^T$, vilket är en tillåten punkt. Lagrangemultiplikatorn är positiv, och vi har hittat en optimalpunkt.

5. (Se kursmaterialet.)