KTH Matematik

5B1817 Tillämpad ickelinjär optimering, 5p

Barriärmetoder för linjärprogrammering och semidefinit programmering

Linjärprogrammering	**Semidefinit programmering**
Givet är $A \in I\!R^{m\times n}$, $b \in I\!R^{m}$ och $c \in I\!R^{n}$.	Givet är $B \in I\!R^{m\times m}$, B symmetrisk, $A_j \in I\!R^{m\times m}$, A_j symmetriska, för $j = 1, \ldots, n$ och $c \in I\!R^{n}$.
Låt $e = (1\ 1\ \ldots 1)^T$, $g(x) = Ax - b$ och $G(x) = \mathrm{diag}(g(x))$.	Låt $G(x) = \sum_{j=1}^{n} A_j x_j - B$.
Primalt problem: $(P)\quad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & Ax \ge b. \end{array}$	Primalt problem: $(P)\quad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{då} & \sum_{j=1}^{n} A_j x_j \succeq B. \end{array}$
Dualt problem: $(D)\quad \begin{array}{ll} \max & b^T y \\ \text{då} & A^T y = c, \\ & y \ge 0. \end{array}$	Dualt problem: $(D)\quad \begin{array}{ll} \max & \mathrm{trace}(BY) \\ \text{då} & \mathrm{trace}(A_j Y) = c_j, \quad j = 1, \ldots, n, \\ & Y = Y^T \succeq 0. \end{array}$
Dualitetsgap: $c^T x - b^T y = g(x)^T y.$	Dualitetsgap: $c^T x - \mathrm{trace}(BY) = \mathrm{trace}(G(x)Y).$
Barriärtransformerat problem: $(P_\mu)\quad \min c^T x - \mu \sum_{i=1}^{m} \ln(g_i(x)).$	Barriärtransformerat problem: $(P_\mu)\quad \min c^T x - \mu \ln(\det(G(x))).$
Optimalitetsvillkor: $c - \mu A^T G(x)^{-1} e = 0.$	Optimalitetsvillkor: $c_j - \mu\, \mathrm{trace}(A_j G(x)^{-1}) = 0, \quad j = 1, \ldots, n.$
Med $y = \mu G(x)^{-1} e$ kan optimalitetsvillkoren skrivas som $\begin{array}{rcl} c - A^T y & = & 0, \\ G(x) y - \mu e = 0. & & \end{array}$ ($g(x) > 0$, $y > 0$ implicit)	Med $Y = \mu G(x)^{-1}$ kan optimalitetsvillkoren skrivas som $\begin{array}{l} c_j - \mathrm{trace}(A_j Y) = 0, \quad j = 1, \ldots, n, \\ G(x)Y - \mu I = 0. \end{array}$ ($G(x) \succ 0$, $Y \succ 0$ implicit)
Vi har n primala variabler och m duala variabler.	Vi har n primala variabler och $\frac{m(m+1)}{2}$ duala variabler.

Alla resultaten i den vänstra kolumnen kan erhållas som ett specialfall av resultaten i den högra kolumnen genom att låta matriserna vara diagonalmatriser.

Det gäller att

$$\frac{\partial \ln(\det(G(x)))}{\partial x_j} = \mathrm{trace}(A_j G(x)^{-1}) \quad \text{för} \quad j = 1, \ldots, n.$$