KTH Mathematics

Tentamen i SF1861 Optimeringslära för T.
Tisdag 19 maj 2009 kl. 08.00–13.00

Examinator: Per Enqvist, tel. 790 62 98

Tillåtna hjälpmedel: Penna, sudd och linjal. **Ej räknare!** Ett formelblad delas ut

Om ej annat anges i texten skall problemen lösas med systematiska metoder som ej blir orimliga vid stora problem. Slutsatser ska motiveras ordentligt. Om ej annat anges i texten får kända satser användas utan bevis.

Den som har minst 5 poäng från hemuppgifterna ska hoppa över uppgift 1(a).
Den som har minst 9 poäng från hemuppgifterna ska hoppa över hela uppgift 1.
För godkänt krävs 25 poäng. 23-24 poäng ger möjlighet att komplettera inom tre veckor efter att tentamensresultatet har anslagits. Kontakta i så fall examinator.

Numrera sidorna och skriv namn på varje blad. Behandla endast en uppgift per blad.

---

1. (a) Betrakta följande linjära optimeringsproblem:

$$(P) \quad \left[\begin{array}{ll} \min\limits_{x} & x_1 - x_2 + 3x_3 \\ \text{då} & x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ & 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 7 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{array}\right].$$

Ett sätt att hitta en startbaslösning till detta problem är att lösa ett så kallat fas 1 problem. Formulera fas 1 problemet för att hitta en startbaslösning till (P), och ange en tillåten baslösning till detta fas 1 problem.

Hur vet man baserat på lösningen av fas 1 problemet om (P) har en tillåten baslösning eller inte?

Notera: Fas 1 problemet behöver inte lösas. ....(5p)

(b) Betrakta problemet

$$\begin{array}{rl} \text{minimera} & 5x_1 + 4x_2 \\ \text{då} & x_1 + 2x_2 \geq 2 \\ & x_1 - x_2 \geq 1 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \end{array}$$

och dess dual

$$\begin{array}{rl} \text{maximera} & 2y_1 + y_2 \\ \text{då} & y_1 + y_2 \leq 5 \\ & 2y_1 - y_2 \leq 4 \\ & y_1 \geq 0, y_2 \geq 0. \end{array}$$

Bestäm grafiskt lösningen till de två optimeringsproblemen och verifiera sedan med hjälp av svag dualitet att dessa verkligen är de optimala lösningarna.
....(4p)

2. (a) Betrakta följande linjära optimeringsproblem:

$$(P) \quad \left[\begin{array}{ll} \min\limits_{x} & x_1 - 2x_2 \\ \text{då} & x_1 + 3x_2 \leq 1 \\ & x_1 - x_2 \leq 1 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array} \right].$$

Skriv problemet på standardform och lös det med simplexalgoritmen.
Tips: börja med slackvariablerna i basen. .... (4p)

(b) Antag att förutsättningarna till vårat problem ändras så att första komponenten i högerledet ändras med δ. Målfunktionens optimala värde ändras då linjärt om vi antar att δ inte är för stort. Vad är den linjära termen och för vilket intervall för δ gäller detta ?

$$(P_\delta) \quad \left[\begin{array}{ll} \min\limits_{x} & x_1 - 2x_2 \\ \text{då} & x_1 + 3x_2 \leq 1 + \delta \\ & x_1 - x_2 \leq 1 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array} \right].$$

.... (3p)

(c) Antag att förutsättningarna till vårat problem ändras så att koefficienten framför x_1 i målfunktionen ändras med ε. Målfunktionens optimala värde ändras då linjärt om vi antar att ε inte är för stort. Vad är den linjära termen och för vilket intervall för ε gäller detta ?

$$(P_\varepsilon) \quad \left[\begin{array}{ll} \min\limits_{x} & (1+\varepsilon)x_1 - 2x_2 \\ \text{då} & x_1 + 3x_2 \leq 1 \\ & x_1 - x_2 \leq 1 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array} \right].$$

.... (3p)

3. (a) Bestäm bildrummet till A^T och nollrummet till A och visa att dessa underrum är ortogonala då

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

.... (4p)

(b) Betrakta det kvadratiska optimeringsproblemet

$$(P) \quad \begin{bmatrix} \text{minimera} & \frac{1}{2}x^T Hx + c^T x \\ \text{då} & Ax = b \end{bmatrix},$$

där A är som i (a) och b, H, c ges av

$$b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Visa att (P) är ett konvext optimeringsproblem. .... (2p)

(c) Bestäm den optimala punkten till optimeringsproblemet (P). .... (4p)

4. Betrakta det icke-linjära optimeringsproblemet

$$(P) \quad \begin{bmatrix} \text{minimera} & f(x) \\ \text{då} & x \in \mathbb{R}^2 \end{bmatrix}$$

där $f(x) = \sqrt{x_1^2 + 1} + x_2^2$,

(a) Är detta ett konvext optimeringsproblem ? .... (1p)

(b) Starta i punkten $x^{(0)} = (2, 1)$ och utför ett steg med Newton's metod. Använd en steglängd t_0 som ges av det största av värdena $1, 1/2, 1/4, \cdots$ sådant att $f(x^{(0)} + t_0 d^{(0)}) < f(x^{(0)})$.
Ledning: $\sqrt{10} - \sqrt{5} \approx 0.92$. .... (4p)

(c) Antag nu att det tillåtna området till (P) begränsas till

$$\mathcal{F} = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \geq 1 \right\}.$$

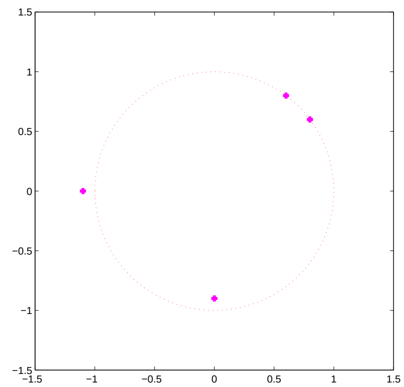
Uppfyller i så fall punkten $x^* = (1, 0)$ KKT-villkoren ?
Kan vi nu säga att x^* är ett lokalt eller globalt minimum ?
Motivera svaret väl. .... (3p)

(d) Antag nu att det tillåtna området till (P) begränsas till

$$\mathcal{F} = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : (x_1 - 2)^2 + x_2^2 \leq 1 \right\}.$$

Uppfyller i så fall punkten $x^* = (1, 0)$ KKT-villkoren ?
Kan vi nu säga att x^* är ett lokalt eller globalt minimum ?
Motivera svaret väl. .... (3p)

5. Givet ett antal punkter $\{(p_i, q_i)\}_{i=1}^m$ i planet, bestäm den cirkel i planet som i minsta kvadrat-mening bäst ansluter till dessa punkter. De givna punkterna kan ses som mätvärden av positionen för ett antal okända punkter som vi vet ligger på en cirkel.



(a) Formulera ovanstående problem som ett icke-linjärt minsta kvadratproblem. (Det kan finnas flera meningsfulla formuleringar av problemet) . . . . (3p)

(b) Antag att vi har givet punkterna $\{(0.6, 0.8), (0.8, 0.6), (-1.1, 0), (0, -0.9)\}$. Bestäm första ordningens nödvändiga optimalitetsvillkor för problemet du formulerade i (a) i detta fall. . . . . (3p)

(c) Bestäm det ekvationssystem som enligt Gauss-Newton's metod bestämmer en sökriktning d. Hur ser detta ut om vi antar att vi börjar med en startlösning bestående av enhetscirkeln med centrum i origo för problemet i (b).

Beskriv hur man lämpligen använder d för att få fram nästa iterationspunkt. . . . . (4p)

Lycka till!