KTH Mathematics

Tentamen i SF1861 Optimeringslära för T.
Torsdag 27 maj 2010 kl. 14.00–19.00

Examinator: Per Enqvist, tel. 790 62 98

Tillåtna hjälpmedel: Penna, sudd och linjal. **Ej räknare!** Ett formelblad delas ut

Om ej annat anges i texten skall problemen lösas med systematiska metoder som ej blir orimliga vid stora problem. Slutsatser ska motiveras ordentligt. Om ej annat anges i texten får kända satser användas utan bevis.

Den som har minst 5 poäng från hemuppgifterna ska hoppa över uppgift 1(a).
Den som har minst 9 poäng från hemuppgifterna ska hoppa över hela uppgift 1.
För godkänt krävs 25 poäng. 23-24 poäng ger möjlighet att komplettera inom tre veckor efter att tentamensresultatet har anslagits. Kontakta i så fall examinator.

Numrera sidorna och skriv namn på varje blad. Behandla endast en uppgift per blad.

---

1. (a) På grund av störningar i flygtrafiken har ett flygbolag tvingats att skicka bussar från Sverige ner till Europa för att ta hem sina passagerare. Man har tillgång till 25 bussar i Stockholm, 20 i Göteborg och 15 i Malmö. Det finns 10, 5, 15 och 20 busslaster med otåliga passagerare i städerna Rom, Madrid, Paris och Aten. Antag att kostnaden för att köra en buss mellan var och en av dessa städer är känd. Företaget vill lösa problemet att forsla ner bussarna på billigaste sätt. Formulera detta optimeringsproblem som ett linjärt optimeringsproblem på STANDARDFORM.

Man behöver inte hantera frågan om huruvida man får heltaliga lösningar.

Bestäm en tillåten baslösning till detta problem. . . . . (5p)

(b) Låt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Bestäm nollrummet till A och bildrummet till A^T.
Vi vet att $\mathcal{R}(A^T) \oplus \mathcal{N}(A) = I\!R^3$. Låt $z = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T$.
Bestäm $u \in \mathcal{R}(A^T)$ och $v \in \mathcal{N}(A)$ sådana att $z = u + v$. . . . . (4p)

2. (a) Betrakta följande linjära optimeringsproblem:

$$(P) \quad \left[\begin{array}{ll} \min\limits_{x} & x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 + 4x_5 \\ \text{då} & x_1 + x_2 + 2x_4 + 4x_5 = 1 \\ & 2x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0 \end{array} \right].$$

Lös det med simplexalgoritmen.
Tips: börja med variablerna 1 och 2 i basen. . . . . (4p)

(b) Bestäm det duala problemet till (P). (skriv det på komponentform, ej matrisform)
Vad är den optimala lösningen till detta problem ? ....(4p)

(c) Vad blir den optimala lösningen om höger led i det första bivillkoret i (P) ändras till 1/2 ? Hur ändras optimalvärdet ? ....(2p)

3. (a) Bestäm, om möjligt, LDL^T-faktoriseringen för den symmetriska matrisen

$$H = \begin{bmatrix} 2 & -6 & 8 \\ -6 & 20 & -20 \\ 8 & -20 & 41 \end{bmatrix}.$$

Både matriserna L och D ska bestämmas. Är H positivt definit ? ....(4p)

(b) Betrakta det kvadratiska optimeringsproblemet

$$(P) \quad \begin{bmatrix} \text{minimera} & \frac{1}{2}x^T Hx + c^T x \\ \text{då} & Ax = b \end{bmatrix},$$

där H är som i (a) och A, b, c ges av

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Avgör om (P) är ett konvext optimeringsproblem och bestäm en optimal punkt till optimeringsproblemet (P) om en sådan existerar. ....(4p)

(c) Är $d = [1 \ -1 \ 0]^T$ en tillåten avtaganderiktning i punkten $x = [1\ 0\ 0]^T$? .(2p)

4. Betrakta det icke-linjära optimeringsproblemet

$$(P) \quad \begin{bmatrix} \text{minimera} & f(x) \\ \text{då} & x \in \mathbb{R}^3 \end{bmatrix}$$

där $f(x) = \exp\left\{x_2 + x_3^2\right\} + x_1^2$,

(a) Är detta ett konvext optimeringsproblem ? ....(1p)

(b) Starta i punkten $x^{(0)} = (0, 0, 0)$ och tag ett enhetssteg med Newton's metod. (steglängden kan väljas till $t = 1$)
Kommer Newton's metod att konvergera för detta exempel. Om ja, till vilken punkt i så fall. Om nej, motivera varför. ....(3p)

(c) Antag nu att det tillåtna området till (P) begränsas till

$$\mathcal{F} = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0\right\}.$$

Uppfyller i så fall punkten $x^* = (0, 0, 0)$ KKT-villkoren ?
Kan vi nu säga att x^* är ett lokalt eller globalt minimum ?
Motivera svaret väl. ....(3p)

(d) Antag nu att det tillåtna området till (P) begränsas till

$$\mathcal{F} = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : (x_1 - 1)^2 + x_2^2 \geq 1 \right\}.$$

Uppfyller i så fall punkten $x^* = (0, 0, 0)$ KKT-villkoren ?
Kan vi nu säga att x^* är ett lokalt eller globalt minimum ?
Motivera svaret väl. .... (3p)

5. Vi avslutar med lite gott och blandat: (tre oberoende problem)

(a) Vi har ett system som uppfyller differentialekvationen $\ddot{x}(t) = C\cos(t)$, där C är en okänd konstant. Lösningen till denna är på formen

$$x(t) = A + Bt - C\cos(t).$$

Antag att vi för tiderna $t_1 = 0$,$t_2 = \pi/4$,$t_3 = \pi/3$ och $t_4 = \pi/2$ har uppmätt värdena på $x(t_k)$ till 2,3,4 och 4 respektive. Formulera problemet att bestämma de parametrarna A, B, C som bäst matchar de uppmätta värdena i en kvadratisk norm.

Ställ upp det ekvationssystem som bestämmer de optimala parametrarna så explicit som möjligt. .... (4p)

(b) Betrakta området $C = \{x \in I\!R^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1, x_1^2 + x_3^2 = 1\}$. Är C konvext ? Alla utom två punkter är reguljära, vilka då? .... (3p)

(c) Betrakta problemet

$$\begin{array}{rl} \text{minimera} & c_1x_1 + c_2x_2 \\ \text{då} & -x_1 + x_2 \geq 2 \\ & x_1 + x_2 \geq 1 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \end{array}$$

För vilka vektorer $c = [c_1,\ c_2]$ har detta problem en ändlig lösning ? Motivera väl. .... (4p)

Lycka till!