KTH Mathematics

Tentamen i SF1861 Optimeringslära för T.
Onsdag 25 augusti 2010 kl. 14.00–19.00

Examinator: Per Enqvist, tel. 790 62 98

Tillåtna hjälpmedel: Penna, sudd och linjal. **Ej räknare!** Ett formelblad delas ut

Om ej annat anges i texten skall problemen lösas med systematiska metoder som ej blir orimliga vid stora problem. Slutsatser ska motiveras ordentligt. Om ej annat anges i texten får kända satser användas utan bevis.

Den som har minst 5 poäng från hemuppgifterna ska hoppa över uppgift 1(a).
Den som har minst 9 poäng från hemuppgifterna ska hoppa över hela uppgift 1.
För godkänt krävs 25 poäng. 23-24 poäng ger möjlighet att komplettera inom tre veckor efter att tentamensresultatet har anslagits. Kontakta i så fall examinator.

Numrera sidorna och skriv namn på varje blad. Behandla endast en uppgift per blad.

---

1. (a) Optimeringsproblemet

$$(P) \quad \begin{bmatrix} \text{minimera} & c^T x \\ \text{då} & Ax = b \\ & x \in \mathbb{R}^6 \end{bmatrix}$$

där

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 50 \\ -10 \\ -10 \\ -20 \\ -10 \end{bmatrix},$$

och

$$c = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 3 & 4 & 3 \end{bmatrix},$$

beskriver ett nätverksflödesproblem. Använd simplexalgoritmen (för nätverk eller den allmänna formen) för att verifiera att $x = \begin{bmatrix} 40 & 10 & 20 & 10 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$, är den optimala lösningen. (eftersom det bara finns en källa är det lätt att inse att så är fallet, men detta ger inga poäng) . . . . (5p)

(b) Låt

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 2 & 10 & 20 \\ 8 & 20 & 66 \end{bmatrix}.$$

Bestäm, om möjligt, LDL^T-faktoriseringen till H. Är matrisen H positivt definit, positivt semidefinit eller varken eller ?

Vad kan vi säga om optimeringsproblemet att minimera $f(x) = x^T H x$, då vi låter $x \in \mathbb{R}^3$. . . . . (4p)

2. (a) Betrakta följande linjära optimeringsproblem: (Notera att det är maximering)

$$(P_a) \quad \left[\begin{array}{ll} \max\limits_{x} & x_1 + 2x_2 + x_3 \\ \text{då} & x_1 + 3x_3 \leq 1 \\ & x_1 + x_2 - x_3 \leq 1 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, \end{array} \right].$$

Skriv problemet på standardform och lös det med simplexalgoritmen. Börja med slackvariablerna i basen. .... (4p)

(b) $x_b = (0, 3/2, 1/2, 0)$ är en optimal punkt för optimeringsproblemet

$$(P_b) \quad \left[\begin{array}{ll} \min\limits_{x} & x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 \\ \text{då} & x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 2 \\ & -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, \end{array} \right].$$

Bestäm det duala problemet till (P_b) och en optimal punkt till denna dual. .... (4p)

(c) Verifiera att punkten x_b verkligen är optimal för primala problemet (P_b). .... (2p)

3. (a) Låt

$$(QP_j) \quad \left[\begin{array}{ll} \text{minimera} & \frac{1}{2}x^T H_j x + c_j^T x \\ \text{då} & x \in I\!R^2 \end{array} \right],$$

där H_j och c_j ges av

$$H_1 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad c_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$H_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad c_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

$$H_3 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad c_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$H_4 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad c_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Vilka av de kvadratiska optimeringsproblemen (QP_j), där $j = 1, \cdots, 4$, har en ändlig lösning? .... (6p)

(b) Om vi lägger till ett bivillkor till problemen (QP_j), dvs betraktar

$$(QP_j^=) \quad \left[\begin{array}{ll} \text{minimera} & \frac{1}{2}x^T H_j x + c_j^T x \\ \text{då} & Ax = b \end{array} \right],$$

där

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix},$$

vilka av problemen $(QP_j^=)$ har nu en ändlig lösning? .... (4p)

4. Betrakta det icke-linjära optimeringsproblemet

$$(P) \quad \begin{bmatrix} \text{minimera} & f(x) \\ \text{då} & x \in \mathbb{R}^3 \end{bmatrix}$$

där $f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3 + x_3^4 + x_1$.

(a) Är detta ett konvext optimeringsproblem ? .... (3p)

(b) Starta i punkten $x^{(0)} = (0, 0, 0)$ och använd gradientmetoden (steepest descent) för att bestämma nästa iterationspunkt med hjälp av exakt linjesökning, dvs gör en exakt minimering av funktionen i den riktning som anges av gradientmetoden.
(Om ni använder backsteppingmetoden kan ni högst få 2p) ....(3p)

(c) Antag nu att det tillåtna området till (P) begränsas till den så kallade enhetskuben, dvs den kub i positiva ortanten med ett hörn i origo och alla sidorna har längd ett. Uppfyller i så fall punkten $x^* = (0, 0, 0)$ KKT-villkoren ?
Kan vi nu säga att x^* är ett lokalt eller globalt minimum ?
Motivera svaret väl. .... (5p)

5. (a) Betrakta optimeringsproblemet

$$(P) \quad \begin{bmatrix} \text{minimera} & f(x) = Ax_1 + Bx_2 \\ \text{då} & x_1^2 + x_2^2 = 1 \\ & x \in \mathbb{R}^2 \end{bmatrix}$$

där A och B är två godtyckliga konstanta parametrar som inte båda är noll.
Är problemet konvext ?
Bestäm alla punkter som uppfyller första ordningens villkor för optimalitet för denna typ av problem. Är någon av dessa optimal? Motivera noga. .....(6p)

(b) De tillåtna punkterna för problemet i a-uppgiften kan parameteriseras genom att låta $x_1(t) = \cos(t)$ och $x_2(t) = \sin(t)$, där $t \in [-\pi,\ \pi]$.
Detta ger ett nytt problem i variabeln t. Är detta nya problem konvext ?

För detta nya problem i t, starta i punkten $t = 0$, och använd Newtons metod för att bestämma nästa punkt (med full steglängd).
Vilket krav måste vi ställa på parametrarna A och B för att vara säkra på att Newtonmetoden ger en descentriktning för detta startsteg? .... (4p)

Lycka till!