Krister Svanberg, mars 2012

1 LP-problem på standardform och Simplexmetoden

I detta avsnitt utgår vi från LP-formuleringen (2.12) från föreläsning 1. Denna form är den bäst lämpade för en strömlinjeformad implementering av simplexmetoden. I många böcker är detta den enda behandlade formen på LP-problem, och den brukar kallas *standardformen.*

Vi upprepar att ett LP-problem på standardform ser ut så här:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}: \qquad \text{minimera} \quad & \mathbf{c}^{\mathsf{T}}\mathbf{x} \\ \text{då} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \end{aligned} \tag{1.1}$$

där $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathsf{T}} \in I\!R^n$ är variabelvektorn, $\mathbf{c} \in I\!R^n$ och $\mathbf{b} \in I\!R^m$ är givna vektorer, medan $\mathbf{A}$ är en given $m \times n$ matris.

Tillåtna området till problemet P kallar vi för $\mathcal{F}$, dvs

$$\mathcal{F} = \{\mathbf{x} \in I\!R^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \;\text{ och }\; \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}.$$

Def: $\mathbf{x} \in I\!R^n$ är en *tillåten lösning* till problemet P om $\mathbf{x} \in \mathcal{F}$.
$\hat{\mathbf{x}} \in I\!R^n$ är en *optimal lösning* till problemet P om $\hat{\mathbf{x}} \in \mathcal{F}$ och $\mathbf{c}^{\mathsf{T}}\hat{\mathbf{x}} \leq \mathbf{c}^{\mathsf{T}}\mathbf{x}$ för alla $\mathbf{x} \in \mathcal{F}$.

Antag först att $\mathbf{A}$ har *linjärt beroende* rader. Då finns det två fall:
Om $\mathbf{b} \in \mathcal{R}(\mathbf{A})$ (= bildrummet till $\mathbf{A}$, även kallat kolonnrummet till $\mathbf{A}$) så innehåller systemet $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ redundanta ekvationer som kan elimineras utan att det påverkar vare sig ekvationssystemet eller LP-problemet.
Om $\mathbf{b} \notin \mathcal{R}(\mathbf{A})$ så saknar ekvationssystemet $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lösning och därmed saknar LP-problemet tillåtna lösningar och är därför ointressant (eller felformulerat).

Båda dessa fall är lätta att upptäcka och åtgärda *innan* man börjar lösa LP-problemet, så vi kommer fortsättningsvis att förutsätta att *raderna i matrisen* $\mathbf{A}$ *är linjärt oberoende.*
Att $\mathbf{A}$ har linjärt oberoende rader innebär bland annat att kolonnerna i $\mathbf{A}$ spänner upp hela $I\!R^m$, dvs att varje vektor $\mathbf{b} \in I\!R^m$ kan skrivas som en linjärkombination av kolonnerna i $\mathbf{A}$.
Detta medför att systemet $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ alltid har minst en lösning $\mathbf{x}$, men det är inte säkert att det finns någon lösning som dessutom uppfyller $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$.
En annan konsekvens av att $\mathbf{A}$ har linjärt oberoende rader är att antalet rader i $\mathbf{A}$ inte kan vara fler än antalet kolonner. Vi har alltså att $n \geq m$. Men om $n = m$ (och raderna i $\mathbf{A}$ är linjärt oberoende) så har systemet $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ exakt en lösning, som eventuellt uppfyller att $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, så då finns ingenting kvar att optimera! Vi förutsätter därför genomgående att $n > m$, dvs att antalet variabler är större än antalet likhetsbivillkor, och att raderna i $\mathbf{A}$ är linjärt oberoende. Då finns det oändligt många lösningar till systemet $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Låt elementen i matrisen $\mathbf{A}$ heta a_{ij} och låt $\mathbf{a}_j$ beteckna den j:te kolonnen i matrisen $\mathbf{A}$, dvs

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [\, \mathbf{a}_1 \; \cdots \; \mathbf{a}_n \,], \quad \text{där} \;\; \mathbf{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}.$$

Ekvationssystemet $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ kan då ekvivalent skrivas på formen

$$\sum_{j=1}^{n} \mathbf{a}_j x_j = \mathbf{b},$$

vilket kan tolkas som att högerledsvektorn $\mathbf{b}$ ska skrivas som en linjärkombination av kolonnerna $\mathbf{a}_j$, med vikterna x_j. Kravet att $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ betyder då förstås att dessa vikter inte får vara negativa. Problemet P kan alltså tolkas som att man ska framställa högerledsvektorn $\mathbf{b}$ som en så billig icke-negativ linjärkombination av vektorerna $\mathbf{a}_j$ som möjligt, då kostnaderna per enhet av de givna vektorerna $\mathbf{a}_j$ ges av konstanterna c_j.

1.1 Baslösningar och tillåtna baslösningar

Antag att man väljer ut m stycken linjärt oberoende kolonner $\mathbf{a}_{\beta_1}, \ldots, \mathbf{a}_{\beta_m}$ bland de n stycken kolonnerna i $\mathbf{A}$. Då utgör dessa utvalda kolonner en bas i $I\!R^m$.
Låt $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_m)$, låt $\mathbf{A}_\beta$ vara en $m \times m$ matris bildad av just dessa utvalda kolonner, samt låt $\mathbf{x}_\beta \in I\!R^m$ vara en vektor bestående av de variabler som svarar mot de utvalda kolonnerna, det vill säga:

$$\mathbf{A}_\beta = [\,\mathbf{a}_{\beta_1} \;\cdots\; \mathbf{a}_{\beta_m}] \quad \text{och} \quad \mathbf{x}_\beta = (x_{\beta_1}, \ldots, x_{\beta_m})^{\mathsf{T}}.$$

β kallas *basindexvektorn*, $\mathbf{A}_\beta$ kallas *basmatrisen* och $\mathbf{x}_\beta$ kallas *basvariabelvektorn* svarande mot den valda basen. Komponenterna x_{β_i} i basvariabelvektorn kallas *basvariabler*.

De $\ell = n - m$ stycken kolonner i matrisen $\mathbf{A}$ som *inte* ingår i basmatrisen $\mathbf{A}_\beta$ samlar vi i en egen matris $\mathbf{A}_\nu$, och de $\ell = n - m$ stycken komponenter i variabelvektorn $\mathbf{x}$ som *inte* ingår i basvariabelvektorn $\mathbf{x}_\beta$ samlar vi i en egen vektor $\mathbf{x}_\nu$, enligt följande:

$$\mathbf{A}_\nu = [\,\mathbf{a}_{\nu_1} \;\cdots\; \mathbf{a}_{\nu_\ell}] \quad \text{och} \quad \mathbf{x}_\nu = (x_{\nu_1}, \ldots, x_{\nu_\ell})^{\mathsf{T}}.$$

Vektorn $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_\ell)$ kallas *icke-basindexvektorn* svarande mot den valda basen.
Komponenterna x_{ν_i} i vektorn $\mathbf{x}_\nu$ kallas *icke-basvariabler*.

Exempel: Låt $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Då kan systemet $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ skrivas $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} x_4 = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Antag att man väljer $\mathbf{a}_3$ och $\mathbf{a}_2$ (som är linjärt oberoende) till baskolonner.

Då blir $\beta_1 = 3$, $\beta_2 = 2$, $\beta = (3\,,2)$, $\mathbf{A}_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{x}_\beta = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

Vidare blir $\nu_1 = 1$, $\nu_2 = 4$, $\nu = (1\,,4)$, $\mathbf{A}_\nu = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{x}_\nu = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \end{pmatrix}$. $\otimes$

För en given vald bas, definierad av indexvektorerna β och ν, kan ekvationsystemet $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ekvivalent skrivas på formen

$$\mathbf{A}_\beta \mathbf{x}_\beta + \mathbf{A}_\nu \mathbf{x}_\nu = \mathbf{b}, \tag{1.2}$$

ty $\mathbf{A}_\beta \mathbf{x}_\beta + \mathbf{A}_\nu \mathbf{x}_\nu = \sum_{i=1}^{m} \mathbf{a}_{\beta_i} x_{\beta_i} + \sum_{i=1}^{\ell} \mathbf{a}_{\nu_i} x_{\nu_i} = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{a}_j x_j = \mathbf{Ax}$.

Antag att man väljer att sätta alla icke-basvariabler till 0, dvs sätter $\mathbf{x}_\nu = \mathbf{0}$.
Då ges enligt (1.2) basvariablernas värden entydigt av lösningen till systemet $\mathbf{A}_\beta \mathbf{x}_\beta = \mathbf{b}$.
Detta är en tillåten lösning till problemet P om och endast om $\mathbf{x}_\beta \geq \mathbf{0}$.

Def: *Baslösningen* svarande mot en given basindexvektor β definieras av att
$\mathbf{A}_\beta \mathbf{x}_\beta = \mathbf{b}$ och $\mathbf{x}_\nu = \mathbf{0}$.
Detta är en *tillåten baslösning*, förkortat TBL, om $\mathbf{x}_\beta \geq \mathbf{0}$.
Om $\mathbf{x}_\beta \geq \mathbf{0}$ och minst en komponent i vektorn $\mathbf{x}_\beta$ är $= 0$ så är det en *degenererad* TBL.
Om $\mathbf{x}_\beta > \mathbf{0}$ så är det en *icke-degenererad* TBL.

Exempel: Låt $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$, som i exemplet ovan.

Om $\beta = (3\,, 2)$ så ges motsvarande baslösning av att $x_1 = x_4 = 0$, samt att

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}, \text{ dvs } \mathbf{x}_\beta = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \text{så att } \mathbf{x} = (0,\ 2,\ 1,\ 0)^\mathsf{T}.$$

Detta är tydligen en icke-degenererad TBL eftersom båda basvariablerna är > 0.
Om $\beta = (2\,, 4)$ så ges motsvarande baslösning av att $x_1 = x_3 = 0$, samt att

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}, \text{ dvs } \mathbf{x}_\beta = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \text{så att } \mathbf{x} = (0,\ 0,\ 0,\ 5)^\mathsf{T}.$$

Detta är tydligen en *degenererad* TBL eftersom basvariabeln x_2 är $= 0$.
Om $\beta = (1\,, 2)$ så ges motsvarande baslösning av att $x_3 = x_4 = 0$, samt att

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}, \text{ dvs } \mathbf{x}_\beta = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \text{så att } \mathbf{x} = (5,\ -5,\ 0,\ 0)^\mathsf{T}.$$

Detta är tydligen *inte* en TBL eftersom basvariabeln x_2 är < 0. $\otimes$

Att tillåtna baslösningar är intressanta beror främst på följande viktiga resultat (som inte bevisas här).

Sats: Om det finns minst en optimal lösning till P så finns det minst en TBL som är en optimal lösning till P.

1.2 Förberedelser till simplexmetoden

Här följer några beteckningar svarande mot en given bas, definierad av indexvektorn β.

Vektorn $\bar{\mathbf{b}} \in I\!R^m$ definieras av att $\mathbf{A}_\beta \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{b}$.

Vektorerna $\bar{\mathbf{a}}_j \in I\!R^m$ definieras av att $\mathbf{A}_\beta \bar{\mathbf{a}}_j = \mathbf{a}_j$, för $j = 1, \dots, n$.

Vektorn $\mathbf{y} \in I\!R^m$ definieras av att $\mathbf{y}^\mathsf{T} \mathbf{A}_\beta = \mathbf{c}_\beta^\mathsf{T}$, dvs $\mathbf{A}_\beta^\mathsf{T} \mathbf{y} = \mathbf{c}_\beta$.

Vektorn $\mathbf{r} \in I\!R^n$ definieras av att $\mathbf{r} = \mathbf{c} - \mathbf{A}^\mathsf{T} \mathbf{y}$, dvs $\mathbf{r}^\mathsf{T} = \mathbf{c}^\mathsf{T} - \mathbf{y}^\mathsf{T} \mathbf{A}$,

speciellt är $\mathbf{r}_\beta^\mathsf{T} = \mathbf{c}_\beta^\mathsf{T} - \mathbf{y}^\mathsf{T} \mathbf{A}_\beta = \mathbf{0}^\mathsf{T}$ och $\mathbf{r}_\nu^\mathsf{T} = \mathbf{c}_\nu^\mathsf{T} - \mathbf{y}^\mathsf{T} \mathbf{A}_\nu$.

Talet $\bar{z} \in I\!R$ definieras av att $\bar{z} = \mathbf{c}_\beta^\mathsf{T} \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{y}^\mathsf{T} \mathbf{A}_\beta \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{y}^\mathsf{T} \mathbf{b}$.

Vi inför nu en extra variabel z som håller reda på målfunktionens värde, dvs $z = \mathbf{c}^\mathsf{T} \mathbf{x}$.
Med hjälp av ovanstående beteckningar, samt (1.2), kan vi uttrycka z som funktion av icke-basvariabelvektorn $\mathbf{x}_\nu$, under kravet att $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$: $z = \mathbf{c}^\mathsf{T} \mathbf{x} = \mathbf{c}_\beta^\mathsf{T} \mathbf{x}_\beta + \mathbf{c}_\nu^\mathsf{T} \mathbf{x}_\nu =$
$= \mathbf{y}^\mathsf{T} \mathbf{A}_\beta \mathbf{x}_\beta + \mathbf{c}_\nu^\mathsf{T} \mathbf{x}_\nu = \mathbf{y}^\mathsf{T} (\mathbf{b} - \mathbf{A}_\nu \mathbf{x}_\nu) + \mathbf{c}_\nu^\mathsf{T} \mathbf{x}_\nu = \mathbf{y}^\mathsf{T} \mathbf{b} + (\mathbf{c}_\nu^\mathsf{T} - \mathbf{y}^\mathsf{T} \mathbf{A}_\nu) \mathbf{x}_\nu = \bar{z} + \mathbf{r}_\nu^\mathsf{T} \mathbf{x}_\nu$.
Vi har alltså att

$$z = \mathbf{c}^\mathsf{T} \mathbf{x} = \bar{z} + \mathbf{r}_\nu^\mathsf{T} \mathbf{x}_\nu = \bar{z} + \sum_{i=1}^{\ell} r_{\nu_i} x_{\nu_i}. \tag{1.3}$$

Komponenterna r_{ν_i} i vektorn $\mathbf{r}_\nu$ kallas för *reducerade kostnaderna* för icke-basvariablerna.
I den aktuella baslösningen är $\mathbf{x}_\nu = \mathbf{0}$, vilket ger att $\mathbf{x}_\beta = \bar{\mathbf{b}}$ och $z = \bar{z}$.

Sats: Antag att $\bar{\mathbf{b}} \geq \mathbf{0}$ och att $\mathbf{r}_\nu \geq \mathbf{0}$. Då är den aktuella baslösningen, definierad av att $\mathbf{x}_\beta = \bar{\mathbf{b}}$ och $\mathbf{x}_\nu = \mathbf{0}$, en optimal lösning till det betraktade LP-problemet (1.1).

Bevis: LP-problemet (1.1) kan med hjälp av (1.2) och (1.3) ekvivalent skrivas på formen

$$\begin{array}{rl} \text{minimera} & \bar{z} + \mathbf{r}_\nu^\mathsf{T} \mathbf{x}_\nu \\ \text{då} & \mathbf{A}_\beta \mathbf{x}_\beta + \mathbf{A}_\nu \mathbf{x}_\nu = \mathbf{b}, \\ & \mathbf{x}_\beta \geq \mathbf{0} \;\text{ och }\; \mathbf{x}_\nu \geq \mathbf{0}. \end{array} \tag{1.4}$$

Låt $\mathbf{x}_\beta = \tilde{\mathbf{x}}_\beta$, $\mathbf{x}_\nu = \tilde{\mathbf{x}}_\nu$, vara en godtycklig tillåten lösning till detta problem. Då gäller bland annat att $\tilde{\mathbf{x}}_\nu \geq \mathbf{0}$, vilket tillsammans med olikheten $\mathbf{r}_\nu \geq \mathbf{0}$ medför att målfunktionsvärdet för denna lösning uppfyller $\bar{z} + \mathbf{r}_\nu^\mathsf{T} \tilde{\mathbf{x}}_\nu \geq \bar{z}$.
Men baslösningen $\mathbf{x}_\beta = \bar{\mathbf{b}}$, $\mathbf{x}_\nu = \mathbf{0}$, är en tillåten lösning till (1.4) med målfunktionsvärdet $\bar{z}$. Därmed är denna baslösningen en optimal lösning till problemet, eftersom den dels är en tillåten lösning, dels har minst lika lågt målfunktionsvärde som varje annan tillåten lösning.

Om det för den aktuella TBL:en däremot gäller att $r_{\nu_q} < 0$ för något q så kan man (normalt) hitta en bättre TBL genom att låta x_{ν_q} bli ny basvariabel. Det går till på följande vis:

Låt $x_{\nu_q} = t$, där t ökar från 0, medan övriga icke-basvariabler ligger kvar vid 0, dvs $x_{\nu_i} = 0$ för alla $i \neq q$. Då ger (1.3) att målfunktionen z påverkas enligt följande:

$$z = \bar{z} + r_{\nu_q} t\,, \tag{1.5}$$

medan (1.2) ger att

$$\mathbf{A}_\beta \mathbf{x}_\beta + \mathbf{a}_{\nu_q} t = \mathbf{b}. \tag{1.6}$$

För att få enklare beteckningar kallar vi nu det givna indexet ν_q för k.
Då är alltså $\mathbf{A}_\beta \mathbf{x}_\beta + \mathbf{a}_k t = \mathbf{b}$, vilket ekvivalent kan skrivas $\mathbf{A}_\beta(\mathbf{x}_\beta + \bar{\mathbf{a}}_k t - \bar{\mathbf{b}}) = \mathbf{0}$, vilket i sin tur är ekvivalent med att $\mathbf{x}_\beta + \bar{\mathbf{a}}_k t - \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{0}$, eftersom $\mathbf{A}_\beta$ är ickesingulär.
Därmed har vi följande uttryck för hur basvariablerna beror av t:

$$\mathbf{x}_\beta = \bar{\mathbf{b}} - \bar{\mathbf{a}}_k t, \quad \text{dvs} \quad x_{\beta_i} = \bar{b}_i - \bar{a}_{ik} t \quad \text{för } i = 1, \ldots, m. \tag{1.7}$$

Antag först att vektorn $\bar{\mathbf{a}}_k$ uppfyller att $\bar{\mathbf{a}}_k \leq \mathbf{0}$. Då kan tydligen t öka obegränsat utan att man bryter mot kravet att $\mathbf{x}_\beta \geq \mathbf{0}$. Vi har då hittat en *stråle*, definierad av $x_{\nu_q}(t) = t$, $x_{\nu_i}(t) = 0$ för $i \neq q$ och $x_{\beta_i}(t) = \bar{b}_i - \bar{a}_{ik} t$ för $i = 1, .., m$, dvs $\mathbf{x}_\nu(t) = \mathbf{e}_q t$ och $\mathbf{x}_\beta(t) = \bar{\mathbf{b}} - \bar{\mathbf{a}}_k t$. För varje $t \geq 0$ utgör detta en tillåten lösning till problemet, och när t växer från 0 så minskar målfunktionsvärdet monotont, eftersom $z(t) = \bar{z} + r_k t$ med $r_k < 0$. Speciellt kan vi låta $t \to +\infty$, varvid $z(t) \to -\infty$.
Det betyder att det betraktade LP-problemet saknar ändlig optimallösning om $\bar{\mathbf{a}}_k \leq \mathbf{0}$.

Antag fortsättningsvis att vektorn $\bar{\mathbf{a}}_k$ har minst en strikt positiv komponent.
För varje i med $\bar{a}_{ik} > 0$ gäller då att storleken på t begränsas av talet $\bar{b}_i / \bar{a}_{ik}$.
Om nämligen $t > \bar{b}_i / \bar{a}_{ik}$ så blir $x_{\beta_i} = \bar{b}_i - \bar{a}_{ik} t < 0$, vilket är otillåtet.
För varje i med $\bar{a}_{ik} > 0$ så har vi alltså kravet att $t \leq \bar{b}_i / \bar{a}_{ik}$.
Detta medför att t kan öka till som mest

$$t^{\max} = \min_i \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ik}} \mid \bar{a}_{ik} > 0 \right\}, \tag{1.8}$$

ty om $t > t^{\max}$ så blir minst en basvariabel $x_{\beta_i} < 0$, vilket är otillåtet.
Antag att p är ett minimerande index i (1.8), så att $t^{\max} = \bar{b}_p / \bar{a}_{pk}$ med $\bar{a}_{pk} > 0$.
Då blir $x_{\beta_p} = 0$ när t (dvs x_{ν_q}) har ökat till $t^{\max}$, och då har vi hittat en ny TBL, där x_{ν_q} har blivit ny basvariabel medan x_{β_p} har blivit ny icke-basvariabel (med värdet 0).
Vi uppdaterar då indexvektorerna β och ν genom att låta ν_q och β_p byta plats med varann, vilket kan åstadkommas genom "programkoden" $\gamma = \nu_q\,,\ \nu_q = \beta_p\,,\ \beta_p = \gamma$.

Om $t^{\max} > 0$ så har denna nya TBL ett strikt lägre målfunktionsvärde än förgående TBL, ty $\bar{z} + r_{\nu_q} t^{\max} < \bar{z}$ då $r_{\nu_q} < 0$ och $t^{\max} > 0$. Att $t^{\max} > 0$ är ekvivalent med att samtliga täljare $\bar{b}_i$ i (1.8) är > 0, vilket inträffar exempelvis om den tillåtna baslösningen som vi utgick från är icke-degenererad (ty då är $\bar{b}_i > 0$ för alla i, även de för vilka $\bar{a}_{ik} \leq 0$).

Det är inte så svårt att visa (kanske lämplig övningsuppgift) att den nya basmatrisen $\mathbf{A}_\beta$, som erhålls efter att ν_q och β_p bytt plats med varann enligt ovan, fortfarande har linjärt oberoende kolonner och därmed är ickesingulär. (Beviset bygger på att vi vet att $\bar{a}_{pk} > 0$.)

1.3 Simplexmetoden för LP-problem på standardform

Vi kan nu ge en principiell beskrivning av simplexmetoden tillämpad på LP-problemet (1.1). De olika delarna av metoden har redan behandlats ovan, så vi behöver bara sammanställa dem här. Varje "varv" i metoden, dvs **(I)** – **(IV)** nedan, kallas för en *iteration.*

(I) Givet är en uppdelning av variablerna, representerad av indexvektorerna β och ν, sådan att motsvarande baslösning är en TBL. Beräkna vektorerna $\bar{\mathbf{b}}$, $\mathbf{y}$ och $\mathbf{r}_\nu$ ur $\mathbf{A}_\beta\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{b}$, $\mathbf{A}_\beta^\mathsf{T}\mathbf{y} = \mathbf{c}_\beta$ och $\mathbf{r}_\nu = \mathbf{c}_\nu - \mathbf{A}_\nu^\mathsf{T}\mathbf{y}$. Att $\mathbf{x}$ är en TBL innebär att $\bar{\mathbf{b}} \geq \mathbf{0}$.

(II) Om $\mathbf{r}_\nu \geq \mathbf{0}$ så **avbryts** algoritmen här med konstaterandet att den aktuella baslösningen, definierad av att $\mathbf{x}_\beta = \bar{\mathbf{b}}$ och $\mathbf{x}_\nu = \mathbf{0}$, är en optimal lösning till det betraktade problemet. Välj annars ett q sådant att $r_{\nu_q} < 0$, sätt $k = \nu_q$ och beräkna vektorn $\bar{\mathbf{a}}_k$ ur $\mathbf{A}_\beta\bar{\mathbf{a}}_k = \mathbf{a}_k$.

(III) Om $\bar{\mathbf{a}}_k \leq \mathbf{0}$ så **avbryts** algoritmen här med konstaterandet att problemet saknar (ändlig) optimallösning.
Beräkna annars talet $t^{\max} = \min\limits_i \left\{ \dfrac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ik}} \mid \bar{a}_{ik} > 0 \right\} = \dfrac{\bar{b}_p}{\bar{a}_{pk}}$, där p är ett minimerande index i.

(IV) Uppdatera indexvektorerna β och ν genom att låta ν_q och β_p byta plats med varann (dvs $\gamma = \nu_q$, $\nu_q = \beta_p$, $\beta_p = \gamma$). Gå därefter till **(I)** igen.

Om denna algoritm ska användas för att lösa *stora* problem, med kanske tusentals bivillkor och ännu fler variabler, är det nödvändigt att tänka på några saker. Bland annat bör man, när man ska lösa ekvationssystem med den nya basmatrisen $\mathbf{A}_\beta$, utnyttja att denna matris endast skiljer sig i en enda kolonn från den föregående basmatrisen. Ett sätt att utnyttja detta är att vid varje basbyte "uppdatera LU-faktorerna" till basmatrisen. Hur detta går till kan man läsa om i exempelvis Nash and Sofer, avsnitt 7.6.1, men vi ska inte fördjupa oss i dessa implementeringsaspekter här.

1.4 Hur hittar man en tillåten baslösning att starta från?

I steg **(I)** ovan utgår man tydligen från att man har indexvektorer β och ν sådana att motsvarande baslösning $\mathbf{x}$ är en TBL. Om man väl en gång har hittat indexvektorer som uppfyller detta så kommer de nya indexvektorer som genereras i steg **(IV)** också att uppfylla detta (kan man visa). Kruxet är att man i *första* iterationen kanske inte vet hur man ska välja sina indexvektorer så att motsvarande baslösning blir en TBL. Vi ska i detta avsnitt beskriva hur man kan bestämma en TBL och motsvarande indexvektorer β och ν som simplexmetoden kan starta från.

Vi upprepar att det betraktade LP-problemet P är på formen

$$\begin{array}{lrl} \mathrm{P}: & \text{minimera} & \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} \\ & \text{då} & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \\ & & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \end{array} \tag{1.9}$$

där vi förutsätter att högerledsvektorn uppfyller $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$ (efter att vissa ekvationer vid behov har multiplicerats med -1).

Betrakta nu följande LP-problem i variablerna $\mathbf{x} \in I\!R^n$ och $\mathbf{v} \in I\!R^m$:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}_0: \quad \text{minimera} \quad & \mathbf{e}^{\mathsf{T}}\mathbf{v} \\ \text{då} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{I}\mathbf{v} = \mathbf{b}, \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \text{ och } \mathbf{v} \geq \mathbf{0}, \end{aligned} \tag{1.10}$$

där $\mathbf{I}$ är enhetsmatrisen och $\mathbf{e} = (1, \ldots, 1)^{\mathsf{T}}$.

Till detta problem P_0 finns en naturlig TBL, nämligen $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ och $\mathbf{v} = \mathbf{b}$.
Om vi döper om variablerna v_i till x_{n+i} (för $i = 1, \ldots, m$) så ges indexvektorerna β och ν svarande mot denna TBL av $\beta = (n+1, \ldots, n+m)$ och $\nu = (1, \ldots, n)$.

Antag nu att man med hjälp av simplexmetoden bestämmer en optimal TBL $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{v}})$ till P_0.
Då är antingen $\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{0}$ eller $\mathbf{e}^{\mathsf{T}}\hat{\mathbf{v}} > 0$.

Om $\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{0}$ så är $\hat{\mathbf{x}}$ en tillåten lösning till det ursprungliga problemet P. (Det ser man om man sätter in $\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{0}$ i problemet P_0.) Dessutom är $\hat{\mathbf{x}}$ normalt en TBL till problemet P, ty de artificiella variablerna v_i (som alltså har värdet 0) har normalt blivit icke-basvariabler. Motsvarande indexvektorer β och ν, med variablerna v_i bortrensade, kan då användas vid starten av simplexmetoden för att lösa det ursprungliga problemet P. (Om några artificiella variabler skulle råka vara kvar i basen trots att de har värdet 0 så har vi en degenererad optimal baslösning till P_0, men då kan man alltid byta ut dessa artificiella basvariabler mot några lämpligt valda x_j så att en tillåten baslösning till P erhålls.)

Om däremot $\mathbf{e}^{\mathsf{T}}\hat{\mathbf{v}} > 0$ så finns det ingen tillåten lösning $\mathbf{x}$ till det ursprungliga problemet P, varför det inte är någon mening att försöka lösa detta.

1.5 Lösning av ett litet exempel med simplexmetoden

Betrakta följande LP-problem. (Observera att det är ett maximeringsproblem).

$$\begin{array}{rrcrcrcl} \text{maximera} & 3x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & & \\ \text{då} & x_1 & - & x_2 & + & x_3 & \leq & 4, \\ & x_1 & + & x_2 & - & x_3 & \leq & 4, \\ & x_1 & & & & & \geq & 0, \\ & & & x_2 & & & \geq & 0, \\ & & & & & x_3 & \geq & 0. \end{array} \tag{1.11}$$

Vi ska lösa problemet med simplexmetoden.
För att problemet ska bli på standardform behöver vi införa slackvariabler x_4 och x_5, samt byta tecken på målfunktionen. Då får vi problemet

$$\begin{array}{rl} \text{minimera} & \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} \\ \text{då} & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \end{array} \tag{1.12}$$

där $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ och $\mathbf{c} = (-3,\ 1,\ -2,\ 0,\ 0)^\mathsf{T}$.

Vi startar med slackvariablerna x_4 och x_5 som startbasvariabler.

Första iterationen.

Att x_4 och x_5 är basvariabler svarar mot att $\beta = (4, 5)$ och $\nu = (1, 2, 3)$.

Motsvarande basmatris ges av $\mathbf{A}_\beta = [\mathbf{a}_4\ \ \mathbf{a}_5] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, medan $\mathbf{A}_\nu = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

Basvariablernas värden i baslösningen ges av $\mathbf{x}_\beta = \bar{\mathbf{b}}$, där vektorn $\bar{\mathbf{b}}$ beräknas ur systemet

$\mathbf{A}_\beta \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{b}$, dvs $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$, med lösningen $\bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Detta är en *tillåten* baslösning eftersom $\bar{\mathbf{b}} \geq \mathbf{0}$.

Simplexmultiplikatorernas värden ges av systemet $\mathbf{A}_\beta^\mathsf{T}\mathbf{y} = \mathbf{c}_\beta$,

dvs $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, med lösningen $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Reducerade kostnaderna för icke-basvariablerna ges av $\mathbf{r}_\nu^\mathsf{T} = \mathbf{c}_\nu^\mathsf{T} - \mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{A}_\nu =$

$= (-3,\ 1,\ -2) - (0,\ 0) \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = (-3,\ 1,\ -2)$.

Eftersom $r_{\nu_1} = r_1 = -3$ är minst, och < 0, låter vi x_1 bli ny basvariabel.

Då behöver vi beräkna vektorn $\bar{\mathbf{a}}_1$ ur systemet $\mathbf{A}_\beta \bar{\mathbf{a}}_1 = \mathbf{a}_1$,

dvs $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} \\ \bar{a}_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, med lösningen $\bar{\mathbf{a}}_1 = \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} \\ \bar{a}_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Det största värde som den nya basvariabeln x_1 kan ökas till ges av

$$x_1^{\max} = \min_i \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{i1}} \mid \bar{a}_{i1} > 0 \right\} = \min \left\{ \frac{\bar{b}_1}{\bar{a}_{11}} \, , \, \frac{\bar{b}_2}{\bar{a}_{21}} \right\} = \min \left\{ \frac{4}{1} \, , \, \frac{4}{1} \right\} = 4.$$

Minimerande index är både $i = 1$ och $i = 2$, varför antingen $x_{\beta_1} = x_4$ eller $x_{\beta_2} = x_5$ ska ut ur basen. Man kan till exempel använda lottning för att bestämma vilken av de båda som inte längre får vara kvar som basvariabel. Antag att man väljer att låta x_4 gå ut ur basen, medan x_5 får bli kvar i basen (tillsammans med den nya basvariabeln x_1).

Andra iterationen.

Nu är alltså $\beta = (1,5)$ och $\nu = (2,3,4)$.

Motsvarande basmatris ges av $\mathbf{A}_\beta = [\mathbf{a}_1 \;\; \mathbf{a}_5] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, medan $\mathbf{A}_\nu = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

Basvariablernas värden i baslösningen ges av $\mathbf{x}_\beta = \bar{\mathbf{b}}$, där vektorn $\bar{\mathbf{b}}$ beräknas ur systemet

$\mathbf{A}_\beta \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{b}$, dvs $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$, med lösningen $\bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Detta är som väntat en tillåten baslösning, men en degenererad sådan eftersom $\bar{b}_2 = 0$.

Simplexmultiplikatorernas värden ges av systemet $\mathbf{A}_\beta^\mathsf{T} \mathbf{y} = \mathbf{c}_\beta$,

dvs $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$, med lösningen $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Reducerade kostnaderna för icke-basvariablerna ges av $\mathbf{r}_\nu^\mathsf{T} = \mathbf{c}_\nu^\mathsf{T} - \mathbf{y}^\mathsf{T} \mathbf{A}_\nu =$

$= (1, \; -2, \; 0) - (-3, \; 0) \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = (-2, \; 1, \; 3).$

Eftersom $r_{\nu_1} = r_2 = -2$ är minst, och < 0, låter vi x_2 bli ny basvariabel.

Då behöver vi beräkna vektorn $\bar{\mathbf{a}}_2$ ur systemet $\mathbf{A}_\beta \bar{\mathbf{a}}_2 = \mathbf{a}_2$,

dvs $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a}_{12} \\ \bar{a}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, med lösningen $\bar{\mathbf{a}}_2 = \begin{pmatrix} \bar{a}_{12} \\ \bar{a}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Det största värde som den nya basvariabeln x_2 kan ökas till ges av

$$x_2^{\max} = \min_i \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{i2}} \mid \bar{a}_{i2} > 0 \right\} = \left\{ \frac{\bar{b}_2}{\bar{a}_{22}} \right\} = \left\{ \frac{0}{2} \right\} = 0.$$

Minimerande index är $i = 2$, varför $x_{\beta_2} = x_5$ ska ut ur basen.

Tredje iterationen.

Nu är $\beta = (1,2)$ och $\nu = (3,4,5)$.

Motsvarande basmatris ges av $\mathbf{A}_\beta = [\mathbf{a}_1 \;\; \mathbf{a}_2] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, medan $\mathbf{A}_\nu = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Basvariablernas värden i baslösningen ges av $\mathbf{x}_\beta = \bar{\mathbf{b}}$, där vektorn $\bar{\mathbf{b}}$ beräknas ur systemet

$$\mathbf{A}_\beta \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{b}, \text{ dvs } \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \text{ med lösningen } \bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Detta är ånyo en tillåten men degenererad baslösning.

Simplexmultiplikatorernas värden ges av systemet $\mathbf{A}_\beta^\mathsf{T} \mathbf{y} = \mathbf{c}_\beta$,

$$\text{dvs } \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ med lösningen } \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Reducerade kostnaderna för icke-basvariablerna ges av $\mathbf{r}_\nu^\mathsf{T} = \mathbf{c}_\nu^\mathsf{T} - \mathbf{y}^\mathsf{T} \mathbf{A}_\nu =$

$$= (-2,\ 0,\ 0) - (-2,\ -1) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (-1,\ 2,\ 1).$$

Eftersom $r_{\nu_1} = r_3 = -1$ är minst, och < 0, låter vi x_3 bli ny basvariabel.

Då behöver vi beräkna vektorn $\bar{\mathbf{a}}_3$ ur systemet $\mathbf{A}_\beta \bar{\mathbf{a}}_3 = \mathbf{a}_3$,

$$\text{dvs } \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a}_{13} \\ \bar{a}_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \text{ med lösningen } \bar{\mathbf{a}}_3 = \begin{pmatrix} \bar{a}_{13} \\ \bar{a}_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Eftersom $\bar{\mathbf{a}}_3 \leq \mathbf{0}$ så kan x_3 öka obegränsat, varvid målfunktionsvärdet (för minimeringsproblemet) går mot $-\infty$. Därmed saknar problemet ändligt optimalvärde och algoritmen avbryts.

Vi ska nu tolka de erhållna resultaten i det ursprungliga problemet (1.11), uttryckt i de ursprungliga tre variablerna x_1, x_2 och x_3.

I startbaslösningen är $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, ty alla tre är icke-basvariabler.
Här låter man x_1 bli ny basvariabel (och få öka från 0).

I nästa tillåtna baslösning är x_2 och x_3 icke-basvariabler, med värdet 0, medan $x_1 = 4$.
Här låter man x_2 bli ny basvariabel, men man kan inte öka x_2 från 0.

I nästa tillåtna baslösning är x_3 icke-basvariabel med värdet 0, medan $x_1 = 4$ och $x_2 = 0$.
Här låter man x_3 bli ny basvariabel (och få öka från 0).

När x_3 ökar från 0 så påverkades basvariablernas värden enligt $\mathbf{x}_\beta = \bar{\mathbf{b}} - \bar{\mathbf{a}}_3 x_3$, dvs

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} x_3, \text{ medan } x_4 \text{ och } x_5 \text{ ligger kvar vid 0.}$$

Om vi här sätter $x_3 = t$, där t ökar från 0, så betyder det att de ursprungliga variablerna beror av t enligt $x_3 = t$, $x_1 = 4$ och $x_2 = t$, som kan skrivas

$$\mathbf{x}(t) = (x_1(t),\ x_2(t),\ x_3(t))^\mathsf{T} = (4,\ 0,\ 0)^\mathsf{T} + t \cdot (0,\ 1,\ 1)^\mathsf{T}.$$

Om vi sätter in detta $\mathbf{x}(t)$ i det ursprungliga problemet (1.11) ser vi att $\mathbf{x}(t)$ är en tillåten lösning för alla $t \geq 0$, och för målfunktionen gäller att $3x_1(t) - x_2(t) + 2x_3(t) = 12 + t \to +\infty$ då $t \to +\infty$.