Krister Svanberg, mars 2012

1 De fyra fundamentala underrummen till en matris

1.1 Definition av underrum

En given delmängd $\mathcal{M}$ av $\mathbb{R}^n$ säges vara ett *underrum* i $\mathbb{R}^n$ om följande gäller:

För varje $\mathbf{v}_1 \in \mathcal{M}$, $\mathbf{v}_2 \in \mathcal{M}$, $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ och $\alpha_2 \in \mathbb{R}$ så gäller att $\alpha_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \cdot \mathbf{v}_2 \in \mathcal{M}$.

Från denna definition följer att om vektorerna $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ samtliga tillhör underrummet $\mathcal{M}$ så kommer varje linjärkombination av dessa vektorer också att tillhöra $\mathcal{M}$.

1.2 Baser till underrum

Låt $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ vara k st givna vektorer i underrummet $\mathcal{M}$, dvs $\mathbf{v}_i \in \mathcal{M}$ för $i = 1 \ldots k$.
$\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ säges *spänna upp* $\mathcal{M}$ om varje vektor $\mathbf{w} \in \mathcal{M}$ kan skrivas som en linjärkombination av dessa vektorer, dvs om det för varje vektor $\mathbf{w} \in \mathcal{M}$ finns k st tal $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ sådana att

$$\alpha_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_2 \cdot \mathbf{v}_k = \mathbf{w}. \tag{1.1}$$

Om vektorerna $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ *dessutom* är linjärt oberoende, så säges de utgöra en *bas* till $\mathcal{M}$.
En bas till ett underrum $\mathcal{M}$ består alltså av ett antal vektorer som dels alla tillhör $\mathcal{M}$, dels spänner upp $\mathcal{M}$, dels är linjärt oberoende.

Om $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ utgör en bas till $\mathcal{M}$ så gäller att varje vektor $\mathbf{w} \in \mathcal{M}$ på ett *unikt* sätt kan skrivas som en linjärkombination av basvektorerna $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$. Att varje $\mathbf{w} \in \mathcal{M}$ verkligen *kan* skrivas som en linjärkombination följer av att basvektorerna spänner upp $\mathcal{M}$. Att denna framställning är *unik* följer av att basvektorerna är linjärt oberoende.

1.3 Dimensionen på ett underrum

Ett urartat underrum i $\mathbb{R}^n$ är $\mathcal{M} = \{\mathbf{0}\}$, dvs underrummet som bara består av nollvektorn. Till detta urartade underrum finns ingen bas, men till varje annat underrum i $\mathbb{R}^n$ kan man visa att det finns minst en bas.
Man kan också visa att om $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ och $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_p$ är två olika baser till samma underrum så är $k = p$. Alla baser till ett givet underrum innehåller alltså samma antal basvektorer. Detta gemensamma antal kallas *dimensionen* för underrummet.

Alltså: Om $\mathcal{M}$ är ett underrum i $\mathbb{R}^n$ och $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ utgör en bas till $\mathcal{M}$ så säges *dimensionen* på underrummet $\mathcal{M}$ vara $= k$. Detta skrivs $\dim \mathcal{M} = k$. Alternativt säger man att $\mathcal{M}$ är ett k-dimensionellt underrum i $\mathbb{R}^n$.

Det urartade underrummet $\mathcal{M} = \{\mathbf{0}\}$ säges vara 0-dimensionellt.

Exempel: Om $\mathcal{M}$ är ett underrum i $\mathbb{R}^3$ så är $\mathcal{M}$ antingen hela $\mathbb{R}^3$ (3-dimensionellt) eller ett plan genom origo (2-dimensionellt) eller en rät linje genom origo (1-dimensionellt) eller enbart punkten origo (0-dimensionellt).

1.4 Ortogonala komplementet till ett underrum

Om $\mathcal{M}$ är ett givet underrum i $\mathbb{R}^n$ så definieras $\mathcal{M}^\perp$ som mängden av alla vektorer $\mathbf{y}$ som är ortogonala mot alla vektorer $\mathbf{z}$ i $\mathcal{M}$, dvs

$$\mathcal{M}^\perp = \{\, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{z} = 0 \;\text{ för alla } \mathbf{z} \in \mathcal{M} \,\}. \tag{1.2}$$

$\mathcal{M}^\perp$ kallas *ortogonala komplementet* till underrummet $\mathcal{M}$.

$\mathcal{M}^\perp$ är också ett underrum i $\mathbb{R}^n$, ty om $\mathbf{u} \in \mathcal{M}^\perp$, $\mathbf{v} \in \mathcal{M}^\perp$, $\alpha \in \mathbb{R}$ och $\beta \in \mathbb{R}$ så gäller för varje $\mathbf{z} \in \mathcal{M}$ att $(\alpha\cdot\mathbf{u} + \beta\cdot\mathbf{v})^\mathsf{T}\mathbf{z} = \alpha\cdot(\mathbf{u}^\mathsf{T}\mathbf{z}) + \beta\cdot(\mathbf{v}^\mathsf{T}\mathbf{z}) = \alpha\cdot 0 + \beta\cdot 0 = 0$, vilket visar att $\alpha\cdot\mathbf{u} + \beta\cdot\mathbf{v} \in \mathcal{M}^\perp$.

Låt $\mathcal{M}$ vara ett givet underrum i $\mathbb{R}^n$. Då kan man visa att följande gäller:

1. Till varje $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ finns ett unikt $\mathbf{z} \in \mathcal{M}$ och ett unikt $\mathbf{y} \in \mathcal{M}^\perp$ sådana att $\mathbf{x} = \mathbf{z} + \mathbf{y}$.
2. Ortogonala komplementet till $\mathcal{M}^\perp$ är $\mathcal{M}$, dvs $(\mathcal{M}^\perp)^\perp = \mathcal{M}$.
3. Om $\dim \mathcal{M} = k$ så är $\dim \mathcal{M}^\perp = n - k$.

Exempel: Antag att $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^3$, dvs $n = 3$. Om $\mathcal{M} = \mathbb{R}^3$ (3-dim) så är $\mathcal{M}^\perp = \{\mathbf{0}\}$ (0-dim). Om $\mathcal{M} = \{\mathbf{0}\}$ (0-dim) så är $\mathcal{M}^\perp = \mathbb{R}^3$ (3-dim). Om $\mathcal{M}$ är ett plan genom origo (2-dim) så är $\mathcal{M}^\perp$ den räta linje genom origo (1-dim) som är vinkelrät mot detta plan. Om $\mathcal{M}$ är en rät linje genom origo (1-dim) så är $\mathcal{M}^\perp$ det plan genom origo (2-dim) som är vinkelrätt mot denna linje.

1.5 De fyra underrummen till en matris

Det finns fyra stycken naturliga underrum svarande mot matrisen $\mathbf{A}$, nämligen *kolonnrummet* (även kallat *bildrummet*), *radrummet*, *nollrummet* och *vänstra nollrummet*.
Radrummet och nollrummet är underrum i $\mathbb{R}^n$ medan de två andra är underrum i $\mathbb{R}^m$. Före definitionen av dessa kommer här lite beteckningar:

Låt $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ vara en given matris, låt $\hat{\mathbf{a}}_j$ beteckna den j:te kolonnen i $\mathbf{A}$ och låt $\bar{\mathbf{a}}_i^\mathsf{T}$ beteckna den i:te raden i $\mathbf{A}$, dvs

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{a}}_1 & \hat{\mathbf{a}}_2 & \cdots & \hat{\mathbf{a}}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{a}}_1^\mathsf{T} \\ \bar{\mathbf{a}}_2^\mathsf{T} \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{a}}_m^\mathsf{T} \end{bmatrix}.$$

Den transponerade matrisen $\mathbf{A}^\mathsf{T}$ ges då av

$$\mathbf{A}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{a}}_1^\mathsf{T} \\ \hat{\mathbf{a}}_2^\mathsf{T} \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{a}}_n^\mathsf{T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{a}}_1 & \bar{\mathbf{a}}_2 & \cdots & \bar{\mathbf{a}}_m \end{bmatrix}.$$

1.6 Kolonnrummet $\mathcal{R}(\mathbf{A})$ till en matris A (= bildrummet)

Bildrummet till en given matris $\mathbf{A} \in I\!R^{m\times n}$ definieras på följande sätt:

$$\mathcal{R}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{Ax} \mid \mathbf{x} \in I\!R^n\}, \tag{1.3}$$

dvs $\mathcal{R}(\mathbf{A})$ = mängden av alla "bilder" $\mathbf{Ax}$ som erhålls då $\mathbf{x}$ sveper över $I\!R^n$.
(På engelska säger man "the *range* of A", vilket förklarar bokstaven $\mathcal{R}$.)
En ekvivalent definition är att $\mathbf{u} \in \mathcal{R}(\mathbf{A})$ om och endast om ekvationssystemet $\mathbf{Ax} = \mathbf{u}$ har minst en lösning $\mathbf{x} \in I\!R^n$.

Eftersom $\mathbf{Ax}$ är en linjärkombination av kolonnerna i matrisen $\mathbf{A}$ så utgör $\mathcal{R}(\mathbf{A})$ mängden av alla sådana linjärkombinationer, dvs

$$\mathcal{R}(\mathbf{A}) = \{\sum_{j=1}^{n} \hat{\mathbf{a}}_j x_j \mid x_j \in I\!R \text{ för alla } j\}. \tag{1.4}$$

Av detta skäl brukar $\mathcal{R}(\mathbf{A})$ även kallas *kolonnrummet* till $\mathbf{A}$.

$\mathcal{R}(\mathbf{A})$ utgör ett *underrum* i $I\!R^m$, ty om $\mathbf{u} \in \mathcal{R}(\mathbf{A})$ och $\mathbf{v} \in \mathcal{R}(\mathbf{A})$ så finns det (minst) ett $\mathbf{y} \in I\!R^n$ och (minst) ett $\mathbf{z} \in I\!R^n$ sådana att $\mathbf{Ay} = \mathbf{u}$ och $\mathbf{Az} = \mathbf{v}$, och då är $\mathbf{A}(\alpha\cdot\mathbf{y} + \beta\cdot\mathbf{z}) = \alpha\cdot\mathbf{Ay} + \beta\cdot\mathbf{Az} = \alpha\cdot\mathbf{u} + \beta\cdot\mathbf{v}$ för alla reella tal α och β, vilket betyder att $\alpha\cdot\mathbf{u} + \beta\cdot\mathbf{v} \in \mathcal{R}(\mathbf{A})$ för alla reella tal α och β.

Om kolonnerna $\hat{\mathbf{a}}_1, \ldots, \hat{\mathbf{a}}_n$ i $\mathbf{A}$ är linjärt oberoende så utgör de en bas till $\mathcal{R}(\mathbf{A})$.
I detta specialfall är alltså $\dim \mathcal{R}(\mathbf{A}) = n$.

1.7 Radrummet $\mathcal{R}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$ till en matris A

Radrummet till en given matris $\mathbf{A} \in I\!R^{m\times n}$ definieras som bildrummet till den transponerade matrisen $\mathbf{A}^\mathsf{T}$, dvs

$$\mathcal{R}(\mathbf{A}^\mathsf{T}) = \{\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{u} \mid \mathbf{u} \in I\!R^m\}. \tag{1.5}$$

En ekvivalent definition är att $\mathbf{y} \in \mathcal{R}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$ om och endast om ekvationssystemet $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{u} = \mathbf{y}$ har minst en lösning $\mathbf{u} \in I\!R^m$.

Eftersom $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{u}$ är en linjärkombination av kolonnerna i matrisen $\mathbf{A}^\mathsf{T}$ så utgör $\mathcal{R}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$ mängden av alla sådana linjärkombinationer, dvs

$$\mathcal{R}(\mathbf{A}^\mathsf{T}) = \{\sum_{i=1}^{m} \bar{\mathbf{a}}_i u_i \mid u_i \in I\!R \text{ för alla } i\}. \tag{1.6}$$

Men kolonnerna i $\mathbf{A}^\mathsf{T}$ är desamma som raderna i $\mathbf{A}$, fast transponerade.
Därav namnet radrummet.

$\mathcal{R}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$ utgör ett *underrum* i $I\!R^n$.
Beviset av detta är helt analogt med beviset av att $\mathcal{R}(\mathbf{A})$ är ett underrum.

Om raderna i $\mathbf{A}$ är linjärt oberoende så är kolonnerna i $\mathbf{A}^\mathsf{T}$ linjärt oberoende, och då utgör dessa kolonner $\bar{\mathbf{a}}_1, \ldots, \bar{\mathbf{a}}_m$ en bas till $\mathcal{R}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$.
I detta specialfall är alltså $\dim \mathcal{R}(\mathbf{A}^\mathsf{T}) = m$.

1.8 Nollrummet $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ till en matris $\mathbf{A}$

Nollrummet till en given matris $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ definieras på följande sätt:

$$\mathcal{N}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}\}. \tag{1.7}$$

Eftersom i:te komponenten i vektorn $\mathbf{Ax}$ kan skrivas $(\mathbf{Ax})_i = \bar{\mathbf{a}}_i^{\mathsf{T}}\mathbf{x}$ så utgör $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ mängden av alla vektorer $\mathbf{x}$ som är ortogonala mot var och en av vektorerna $\bar{\mathbf{a}}_i$, dvs

$$\mathcal{N}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \bar{\mathbf{a}}_i^{\mathsf{T}}\mathbf{x} = \mathbf{0} \text{ för } i = 1, \ldots, m\}. \tag{1.8}$$

$\mathcal{N}(\mathbf{A})$ utgör ett *underrum* i $\mathbb{R}^n$, ty om $\mathbf{y} \in \mathcal{N}(\mathbf{A})$ och $\mathbf{z} \in \mathcal{N}(\mathbf{A})$ så är $\mathbf{Ay} = \mathbf{0}$ och $\mathbf{Az} = \mathbf{0}$, och då är $\mathbf{A}(\alpha\cdot\mathbf{y} + \beta\cdot\mathbf{z}) = \alpha\cdot\mathbf{Ay} + \beta\cdot\mathbf{Az} = \mathbf{0}$ för alla reella tal α och β, vilket betyder att $\alpha\cdot\mathbf{y} + \beta\cdot\mathbf{z} \in \mathcal{N}(\mathbf{A})$ för alla reella tal α och β.

Om kolonnerna i $\mathbf{A}$ är linjärt oberoende så har det homogena ekvationssystemet $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ endast lösningen $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. I detta specialfall är alltså $\mathcal{N}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{0}\}$ och $\dim \mathcal{N}(\mathbf{A}) = 0$.

1.9 Vänstra nollrummet $\mathcal{N}(\mathbf{A}^{\mathsf{T}})$ till en matris $\mathbf{A}$

Vänstra nollrummet till en given matris $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ definieras som nollrummet till den transponerade matrisen $\mathbf{A}^{\mathsf{T}}$, dvs

$$\mathcal{N}(\mathbf{A}^{\mathsf{T}}) = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m \mid \mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{u} = \mathbf{0}\}. \tag{1.9}$$

Genom att transponera bägge leden i $\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{u} = \mathbf{0}$ erhålls $\mathbf{u}^{\mathsf{T}}\mathbf{A} = \mathbf{0}^{\mathsf{T}}$, vilket betyder att

$$\mathcal{N}(\mathbf{A}^{\mathsf{T}}) = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m \mid \mathbf{u}^{\mathsf{T}}\mathbf{A} = \mathbf{0}^{\mathsf{T}}\}. \tag{1.10}$$

Vi har alltså att $\mathbf{u} \in \mathcal{N}(\mathbf{A}^{\mathsf{T}})$ om och endast om $\mathbf{u}$ är transponatet av en radvektor $\mathbf{u}^{\mathsf{T}}$ med egenskapen att om den från vänster multiplicerar matrisen $\mathbf{A}$ så blir resultatet nollradvektorn. Därav namnet vänstra nollrummet till $\mathbf{A}$.

Eftersom j:te komponenten i vektorn $\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{u}$ (och j:te komponenten i vektorn $\mathbf{u}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}$) kan skrivas $(\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{u})_j = \hat{\mathbf{a}}_j^{\mathsf{T}}\mathbf{u}$ så utgör $\mathcal{N}(\mathbf{A}^{\mathsf{T}})$ mängden av alla vektorer $\mathbf{u}$ som är ortogonala mot var och en av vektorerna $\hat{\mathbf{a}}_j$, dvs

$$\mathcal{N}(\mathbf{A}^{\mathsf{T}}) = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m \mid \hat{\mathbf{a}}_j^{\mathsf{T}}\mathbf{u} = 0 \text{ för } j = 1, \ldots, n\}. \tag{1.11}$$

$\mathcal{N}(\mathbf{A}^{\mathsf{T}})$ utgör ett *underrum* i $\mathbb{R}^m$.
Beviset av detta är helt analogt med beviset av att $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ är ett underrum.

Om raderna i $\mathbf{A}$ är linjärt oberoende så är kolonnerna i $\mathbf{A}^{\mathsf{T}}$ linjärt oberoende, och då har det homogena ekvationssystemet $\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{u} = \mathbf{0}$ endast lösningen $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.
I detta specialfall är alltså $\mathcal{N}(\mathbf{A}^{\mathsf{T}}) = \{\mathbf{0}\}$ och $\dim \mathcal{N}(\mathbf{A}^{\mathsf{T}}) = 0$.

1.10 Samband mellan de fyra underrummens dimensioner

Det finns intressanta samband mellan de fyra fundamentala underrummens dimensioner.
Vi upprepar att om $\mathcal{M}$ är ett underrum i $\mathbb{R}^n$ så betecknar $\dim \mathcal{M}$ dimensionen på $\mathcal{M}$.
I hela detta avsnitt antar vi att $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ är en given matris med m rader och n kolonner.

Det första sambandet är att

$$\dim \mathcal{R}(\mathbf{A}) + \dim \mathcal{N}(\mathbf{A}) = n. \tag{1.12}$$

Det andra sambandet, som följer ur (1.12) genom att byta ut $\mathbf{A}$ mot $\mathbf{A}^{\mathsf{T}}$, är att

$$\dim \mathcal{R}(\mathbf{A}^{\mathsf{T}}) + \dim \mathcal{N}(\mathbf{A}^{\mathsf{T}}) = m. \tag{1.13}$$

Det tredje sambandet är att

$$\dim \mathcal{R}(\mathbf{A}) = \dim \mathcal{R}(\mathbf{A}^{\mathsf{T}}). \tag{1.14}$$

Låt r beteckna dimensionen på kolonnrummet till $\mathbf{A}$.
Då kan ovanstående samband uttryckas på följande vis:

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{R}(\mathbf{A}) &= r\,, \\ \dim \mathcal{R}(\mathbf{A}^{\mathsf{T}}) &= r\,, \\ \dim \mathcal{N}(\mathbf{A}) &= n - r\,, \\ \dim \mathcal{N}(\mathbf{A}^{\mathsf{T}}) &= m - r\,. \end{aligned} \tag{1.15}$$

Det införda talet r brukar kallas *rangen* för matrisen $\mathbf{A}$.

En intressant konsekvens av dessa samband är följande båda ekvivalenser.

$$\text{Kolonnerna i } \mathbf{A} \text{ spänner upp } \mathbb{R}^m \;\Leftrightarrow\; \text{Kolonnerna i } \mathbf{A}^{\mathsf{T}} \text{ är linjärt oberoende.} \tag{1.16}$$

$$\text{Kolonnerna i } \mathbf{A}^{\mathsf{T}} \text{ spänner upp } \mathbb{R}^n \;\Leftrightarrow\; \text{Kolonnerna i } \mathbf{A} \text{ är linjärt oberoende.} \tag{1.17}$$

Den första ekvivalensen svarar mot att $r = m$ och den andra mot att $r = n$.

1.11 De fyra underrummens ortogonala komplement

Enligt (1.4) består $\mathcal{R}(\mathbf{A})$ av alla linjärkombinationer av kolonnerna i $\mathbf{A}$, och enligt (1.11) består $\mathcal{N}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$ av de vektorer som är ortogonala mot kolonnerna i $\mathbf{A}$. Därför är det väl intuitivt troligt att dessa båda underrum är varandras ortogonala komplement.
Likaså består $\mathcal{R}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$ enligt (1.6) av alla linjärkombinationer av kolonnerna i $\mathbf{A}^\mathsf{T}$, medan $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ enligt (1.8) består av de vektorer som är ortogonala mot kolonnerna i $\mathbf{A}^\mathsf{T}$, vilket väl gör det troligt att även dessa båda underrum är varandras ortogonala komplement.
Att dessa gissningar är riktiga kan bevisas på följande sätt.

$\mathbf{w} \in \mathcal{R}(\mathbf{A})^\perp \;\Leftrightarrow\; \mathbf{w}^\mathsf{T}\mathbf{u} = 0$ för alla $\mathbf{u} \in \mathcal{R}(\mathbf{A}) \;\Leftrightarrow\; \mathbf{w}^\mathsf{T}(\mathbf{A}\mathbf{x}) = 0$ för alla $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \;\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\; \mathbf{x}^\mathsf{T}(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{w}) = 0$ för alla $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \;\Leftrightarrow\; \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{w} = \mathbf{0} \;\Leftrightarrow\; \mathbf{w} \in \mathcal{N}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$. Alltså är $\mathcal{R}(\mathbf{A})^\perp = \mathcal{N}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$.
Därefter erhålls, mha räkneregeln $(\mathcal{M}^\perp)^\perp = \mathcal{M}$, att $\mathcal{N}(\mathbf{A}^\mathsf{T})^\perp = (\mathcal{R}(\mathbf{A})^\perp)^\perp = \mathcal{R}(\mathbf{A})$.
Genom att överallt i ovanstående resonemang byta plats på $\mathbf{A}$ och $\mathbf{A}^\mathsf{T}$, erhålls på motsvarande sätt att $\mathcal{R}(\mathbf{A}^\mathsf{T})^\perp = \mathcal{N}(\mathbf{A})$ och $\mathcal{N}(\mathbf{A})^\perp = \mathcal{R}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$.

Vi har alltså följande viktiga resultat

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}(\mathbf{A})^\perp &= \mathcal{N}(\mathbf{A}^\mathsf{T})\,, \\
\mathcal{R}(\mathbf{A}^\mathsf{T})^\perp &= \mathcal{N}(\mathbf{A})\,, \\
\mathcal{N}(\mathbf{A})^\perp &= \mathcal{R}(\mathbf{A}^\mathsf{T})\,, \\
\mathcal{N}(\mathbf{A}^\mathsf{T})^\perp &= \mathcal{R}(\mathbf{A})\,.
\end{aligned} \tag{1.18}$$

Eftersom $\mathcal{R}(\mathbf{A})$ och $\mathcal{N}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$ är varandras ortogonala komplement i $\mathbb{R}^m$ så måste summan av dessa båda underrums dimensioner vara m, och eftersom $\mathcal{R}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$ och $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ är varandras ortogonala komplement i $\mathbb{R}^n$ så måste summan av dessa båda underrums dimensioner vara n. Men detta stämmer utmärkt, ty enligt sammanställningen i (1.15) är
$\dim \mathcal{R}(\mathbf{A}) + \dim \mathcal{N}(\mathbf{A}^\mathsf{T}) = r + (m-r) = m$ och $\dim \mathcal{R}(\mathbf{A}^\mathsf{T}) + \dim \mathcal{N}(\mathbf{A}) = r + (n-r) = n$.

2 Baser till de fyra fundamentala underrummen

I detta kapitel visas hur man kan bestämma baser till de fyra fundamentala underrummen. På köpet erhålls en repetition av Gauss-Jordans metod. Vi inleder dock med ett teoretiskt resultat.

2.1 Ett inledande resultat angående rangen av en faktorisering

Sats: Om matrisen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ kan faktoriseras på formen $\mathbf{A} = \mathbf{BC}$, där $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m\times r}$ har linjärt oberoende kolonner (r st) och $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{r\times n}$ har linjärt oberoende rader (r st), så har både $\mathbf{A}$ och $\mathbf{A}^\mathsf{T}$ rangen r. Vidare gäller då att

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\mathbf{A}) &= \mathcal{N}(\mathbf{C}), \\ \mathcal{N}(\mathbf{A}^\mathsf{T}) &= \mathcal{N}(\mathbf{B}^\mathsf{T}), \\ \mathcal{R}(\mathbf{A}) &= \mathcal{R}(\mathbf{B}), \\ \mathcal{R}(\mathbf{A}^\mathsf{T}) &= \mathcal{R}(\mathbf{C}^\mathsf{T}). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Bevis: Den första av dessa fyra relationer visas så här:
$\mathbf{x} \in \mathcal{N}(\mathbf{C}) \;\Rightarrow\; \mathbf{Cx} = \mathbf{0} \;\Rightarrow\; \mathbf{BCx} = \mathbf{0} \;\Rightarrow\; \mathbf{Ax} = \mathbf{0} \;\Rightarrow \mathbf{x} \in \mathcal{N}(\mathbf{A})$, och
$\mathbf{x} \in \mathcal{N}(\mathbf{A}) \;\Rightarrow\; \mathbf{Ax} = \mathbf{0} \;\Rightarrow\; (\mathbf{BC})\mathbf{x} = \mathbf{B}(\mathbf{Cx}) = \mathbf{0} \;\Rightarrow\; \mathbf{Cx} = \mathbf{0} \;\Rightarrow \mathbf{x} \in \mathcal{N}(\mathbf{C})$,
där den näst sista implikationen följer av att $\mathbf{B}$ har linjärt oberoende kolonner.
Den andra av de fyra relationerna visas så här:
$\mathbf{y} \in \mathcal{N}(\mathbf{B}^\mathsf{T}) \;\Rightarrow\; \mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{y} = \mathbf{0} \;\Rightarrow\; \mathbf{C}^\mathsf{T}\mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{y} = \mathbf{0} \;\Rightarrow\; \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{y} = \mathbf{0} \;\Rightarrow \mathbf{y} \in \mathcal{N}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$, och
$\mathbf{y} \in \mathcal{N}(\mathbf{A}^\mathsf{T}) \;\Rightarrow\; \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{y} = \mathbf{0} \;\Rightarrow\; (\mathbf{C}^\mathsf{T}\mathbf{B}^\mathsf{T})\mathbf{y} = \mathbf{C}^\mathsf{T}(\mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{y}) = \mathbf{0} \;\Rightarrow\; \mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{y} = \mathbf{0} \;\Rightarrow \mathbf{y} \in \mathcal{N}(\mathbf{B}^\mathsf{T})$,
där den näst sista implikationen följer av att $\mathbf{C}^\mathsf{T}$ har linjärt oberoende kolonner.
Därefter erhålls de återstående två relationerna på följande sätt mha (1.18):
$\mathcal{R}(\mathbf{A}) = \mathcal{N}(\mathbf{A}^\mathsf{T})^\perp = \mathcal{N}(\mathbf{B}^\mathsf{T})^\perp = \mathcal{R}(\mathbf{B})$ och $\mathcal{R}(\mathbf{A}^\mathsf{T}) = \mathcal{N}(\mathbf{A})^\perp = \mathcal{N}(\mathbf{C})^\perp = \mathcal{R}(\mathbf{C}^\mathsf{T})$.
Det återstår att visa att $\mathbf{A}$ och $\mathbf{A}^\mathsf{T}$ båda har rangen r.
Eftersom kolonnerna i $\mathbf{B}$ är linjärt oberoende, så utgör dessa r st kolonner en bas till $\mathcal{R}(\mathbf{B})$, och därmed även en bas till $\mathcal{R}(\mathbf{A})$ (eftersom $\mathcal{R}(\mathbf{A}) = \mathcal{R}(\mathbf{B})$).
Således är $\dim \mathcal{R}(\mathbf{A}) = r$, vilket är just definitionen av att $\mathbf{A}$ har rangen r.
Eftersom kolonnerna i $\mathbf{C}^\mathsf{T}$ är linjärt oberoende, så utgör dessa r st kolonner en bas till $\mathcal{R}(\mathbf{C}^\mathsf{T})$, och därmed även en bas till $\mathcal{R}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$ (eftersom $\mathcal{R}(\mathbf{A}^\mathsf{T}) = \mathcal{R}(\mathbf{C}^\mathsf{T})$).
Således är $\dim \mathcal{R}(\mathbf{A}^\mathsf{T}) = r$, vilket är just definitionen av att $\mathbf{A}^\mathsf{T}$ har rangen r.

Även omvändningen till ovanstående sats gäller, dvs om matrisen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ har rangen r så kan den faktoriseras på formen $\mathbf{A} = \mathbf{BC}$, där $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m\times r}$ har linjärt oberoende kolonner och $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{r\times n}$ har linjärt oberoende rader. Detta bevisas i nästa avsnitt, tillsammans med en metod för hur man utgående från en given matris $\mathbf{A}$ kan beräkna matriser $\mathbf{B}$ och $\mathbf{C}$ med ovanstående egenskaper.

2.2 En faktorisering baserad på Gauss–Jordans metod

I Gauss–Jordans metod utförs en sekvens av s k *tillåtna radoperationer* som transformerar matrisen $\mathbf{A} \in I\!\!R^{m\times n}$ till en ny matris $\mathbf{T} \in I\!\!R^{m\times n}$ på så kallad *trappstegsform.*

Exempel 2.1 Antag att $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 & -3 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & -1 \\ 3 & 6 & 2 & 5 & 1 \\ 4 & 8 & 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$.

Vi ska använda Gauss–Jordans metod för att överföra denna matris till trappstegsform.

Addition av -2 gånger första raden till andra raden, samt addition av -3 gånger första raden till tredje raden, samt addition av -4 gånger första raden till fjärde raden, ger till resultat matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & -10 & -10 & 10 \\ 0 & 0 & -15 & -15 & 15 \end{bmatrix}.$$

Multiplikation av andra raden med faktorn $-1/5$ ger till resultat matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -10 & -10 & 10 \\ 0 & 0 & -15 & -15 & 15 \end{bmatrix}.$$

Addition av -4 gånger andra raden till första raden, samt addition av 10 gånger andra raden till tredje raden, samt addition av 15 gånger andra raden till fjärde raden, ger till resultat matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Nu är $\mathbf{A}$ överförd till trappstegsform med *två* trappstegsettor, nämligen 1:orna i kolonnerna nummer 1 och 3.

Sekvensen av tillåtna radoperationer som överför $\mathbf{A}$ till $\mathbf{T}$ motsvarar att man från vänster multiplicerar $\mathbf{A}$ med en viss matris $\mathbf{P} \in I\!\!R^{m\times m}$ som är kvadratisk och inverterbar. Med $\mathbf{S} = \mathbf{P}^{-1}$ är alltså

$$\mathbf{PA} = \mathbf{T} \quad \text{och} \quad \mathbf{A} = \mathbf{ST}. \tag{2.2}$$

Låt r beteckna antalet "trappsteg" i matrisen $\mathbf{T}$, låt $\ell = m - r$ och låt $k = n - r$.
Var och en av de r st speciella kolonner i $\mathbf{T}$ som svarar mot ett trappsteg består av exakt en 1:a och resten 0:or. De $\ell = m - r$ sista raderna i $\mathbf{T}$ består av enbart 0:or.
Låt $\mathbf{U} \in I\!\!R^{r\times n}$ vara den matris som erhålls om man tar bort dessa ℓ st nollrader från $\mathbf{T}$, och låt $\mathbf{O}_{\ell\times n} \in I\!\!R^{\ell\times n}$ beteckna nollmatrisen bestående av just dessa borttagna nollrader.
Då kan $\mathbf{T}$ skrivas som en blockmatris med de två blocken $\mathbf{U}$ och $\mathbf{O}_{\ell\times n}$, dvs

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{O}_{\ell\times n} \end{bmatrix}. \tag{2.3}$$

Låt $\beta_1 < \beta_2 < \cdots < \beta_r$ vara numren på de kolonner i $\mathbf{T}$ som svarar mot trappsteg,
låt $\nu_1 < \nu_2 < \cdots < \nu_k$ vara numren på de övriga kolonnerna i $\mathbf{T}$ $(k = n - r)$,
låt $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ vara de n st kolonnerna i matrisen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$,
låt $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ vara de n st kolonnerna i matrisen $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{r \times n}$,
låt $\mathbf{A}_\beta \in \mathbb{R}^{m \times r}$ vara en matris med kolonnerna $\mathbf{a}_{\beta_1}, \ldots, \mathbf{a}_{\beta_r}$,
låt $\mathbf{U}_\beta \in \mathbb{R}^{r \times r}$ vara en matris med kolonnerna $\mathbf{u}_{\beta_1}, \ldots, \mathbf{u}_{\beta_r}$, och
låt $\mathbf{U}_\nu \in \mathbb{R}^{r \times k}$ vara en matris med kolonnerna $\mathbf{u}_{\nu_1}, \ldots, \mathbf{u}_{\nu_k}$.

Då är $\mathbf{A}_\beta = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{\beta_1} \cdots \mathbf{a}_{\beta_r} \end{bmatrix}$ och $\mathbf{U}_\beta = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{\beta_1} \cdots \mathbf{u}_{\beta_r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \cdots \mathbf{e}_r \end{bmatrix} = \mathbf{I}_{r \times r}$,

där $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_r$ är de r st kolonnerna i enhetsmatrisen $\mathbf{I}_{r \times r} \in \mathbb{R}^{r \times r}$.

Vidare har vi att

$$\mathbf{PA} = \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{O}_{\ell \times n} \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{PA}_\beta = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_\beta \\ \mathbf{O}_{\ell \times r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{r \times r} \\ \mathbf{O}_{\ell \times r} \end{bmatrix}. \tag{2.4}$$

Från detta följer att kolonnerna i $\mathbf{A}_\beta$ är linjärt oberoende, ty vi har implikationerna

$$\mathbf{A}_\beta \mathbf{y} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{PA}_\beta \mathbf{y} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{r \times r} \\ \mathbf{O}_{\ell \times r} \end{bmatrix} \mathbf{y} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{I}_{r \times r}\mathbf{y} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{y} = \mathbf{0},$$

vilket visar att den enda lösningen till $\mathbf{A}_\beta \mathbf{y} = \mathbf{0}$ är $\mathbf{y} = \mathbf{0}$.

Vidare är raderna i $\mathbf{U}$ linjärt oberoende, ty

$$\mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{U} = \mathbf{0}^\mathsf{T} \Rightarrow \mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{U}_\beta = \mathbf{0}^\mathsf{T} \Rightarrow \mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{I}_{r \times r} = \mathbf{0}^\mathsf{T} \Rightarrow \mathbf{y} = \mathbf{0}.$$

Med $\mathbf{S} = \mathbf{P}^{-1}$ är, enligt (2.2) och (2.3), $\mathbf{A} = \mathbf{ST} = \mathbf{S} \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{O}_{\ell \times n} \end{bmatrix}$.

Om man delar upp matrisen $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ i två block $\mathbf{S}_1 \in \mathbb{R}^{m \times r}$ och $\mathbf{S}_2 \in \mathbb{R}^{m \times \ell}$, bestående av de r första respektive de ℓ sista kolonnerna i $\mathbf{S}$, så får man att

$$\mathbf{A} = \mathbf{ST} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1 & \mathbf{S}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{O}_{\ell \times n} \end{bmatrix} = \mathbf{S}_1\mathbf{U} + \mathbf{S}_2\mathbf{O}_{\ell \times n} = \mathbf{S}_1\mathbf{U}.$$

Att $\mathbf{A} = \mathbf{S}_1\mathbf{U}$ medför speciellt att $\mathbf{A}_\beta = \mathbf{S}_1\mathbf{U}_\beta = \mathbf{S}_1\mathbf{I}_{r \times r} = \mathbf{S}_1$, och därmed gäller att

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_\beta \mathbf{U}. \tag{2.5}$$

Enligt satsen i avsnitt 2.1 ovan betyder detta att matriserna $\mathbf{A}$ och $\mathbf{A}^\mathsf{T}$ har rangen r.
Rangen för matrisen $\mathbf{A}$ överensstämmer alltså med antalet trappstegsettor i matrisen $\mathbf{T}$.
Men relationen (2.5) medför också att omvändningen till nyssnämnda sats gäller, dvs:

Sats: Om matrisen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ har rangen r så kan den faktoriseras på formen $\mathbf{A} = \mathbf{BC}$, där $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times r}$ har linjärt oberoende kolonner och $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{r \times n}$ har linjärt oberoende rader.

Bevis: Ett möjligt val är enligt ovan $\mathbf{B} = \mathbf{A}_\beta$ och $\mathbf{C} = \mathbf{U}$ (men det finns även andra val).

2.3 En bas till $\mathcal{R}(\mathbf{A})$ och en bas till $\mathcal{R}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$

Med hjälp av faktoriseringen (2.5) och satsen i avsnitt 2.1 så följer direkt att

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\mathbf{A}) &= \mathcal{R}(\mathbf{A}_\beta) \;\text{ och} \\ \mathcal{R}(\mathbf{A}^\mathsf{T}) &= \mathcal{R}(\mathbf{U}^\mathsf{T}). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Det betyder att kolonnerna $\mathbf{a}_{\beta_1}, \ldots, \mathbf{a}_{\beta_r}$ i matrisen $\mathbf{A}_\beta$ utgör en bas till underrummet $\mathcal{R}(\mathbf{A})$, medan kolonnerna i matrisen $\mathbf{U}^\mathsf{T}$ utgör en bas till underrummet $\mathcal{R}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$.

2.4 En bas till $\mathcal{N}(\mathbf{A})$

Vi har att $\mathcal{N}(\mathbf{A}) = \mathcal{R}(\mathbf{A}^\mathsf{T})^\perp = \mathcal{R}(\mathbf{U}^\mathsf{T})^\perp = \mathcal{N}(\mathbf{U})$.

Enligt (1.15) gäller att $\dim \mathcal{N}(\mathbf{A}) = n - r = k$, så för att bestämma en bas till $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ behöver man bestämma k st linjärt oberoende vektorer i $\mathcal{N}(\mathbf{A})$, dvs i $\mathcal{N}(\mathbf{U})$.

Först konstaterar vi att $\mathbf{x} \in \mathcal{N}(\mathbf{U}) \;\Leftrightarrow\; \mathbf{U}\mathbf{x} = \mathbf{0} \;\Leftrightarrow\; \sum_{j=1}^{n} \mathbf{u}_j x_j = \mathbf{0} \;\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \;\sum_{i=1}^{r} \mathbf{u}_{\beta_i} x_{\beta_i} + \sum_{i=1}^{k} \mathbf{u}_{\nu_i} x_{\nu_i} = \mathbf{0} \;\Leftrightarrow\; \mathbf{U}_\beta\, \mathbf{x}_\beta + \mathbf{U}_\nu \mathbf{x}_\nu = \mathbf{0} \;\Leftrightarrow\; \mathbf{I}_{r\times r}\, \mathbf{x}_\beta + \mathbf{U}_\nu \mathbf{x}_\nu = \mathbf{0},$$

där $\mathbf{x}_\beta \in \mathbb{R}^r$ betecknar kolonnvektorn med komponenterna $x_{\beta_1}, \ldots, x_{\beta_r}$,
medan $\mathbf{x}_\nu \in \mathbb{R}^k$ betecknar kolonnvektorn med komponenterna $x_{\nu_1}, \ldots, x_{\nu_k}$.

Eftersom $\mathcal{N}(\mathbf{A}) = \mathcal{N}(\mathbf{U})$ har vi alltså att

$$\mathbf{x} \in \mathcal{N}(\mathbf{A}) \;\Leftrightarrow\; \mathbf{x}_\beta = -\mathbf{U}_\nu \mathbf{x}_\nu. \tag{2.7}$$

För varje enskilt $j \in \{1, \ldots, k\}$ bestämmer man nu en vektor $\mathbf{x} \in \mathcal{N}(\mathbf{A})$ på följande sätt:

$$\mathbf{x}_\nu = \mathbf{e}_j \;\text{ och }\; \mathbf{x}_\beta = -\mathbf{U}_\nu \mathbf{e}_j = -\mathbf{u}_{\nu_j}. \tag{2.8}$$

Vektorn $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ bestämd på detta sätt betecknas $\mathbf{z}_j$. Då gäller alltså att $\mathbf{z}_j \in \mathcal{N}(\mathbf{A})$.
Vidare är $\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_k$ linjärt oberoende, ty om $\mathbf{w} = \mathbf{z}_1 t_1 + \cdots + \mathbf{z}_k t_k$ så gäller för varje $j \in \{1, \ldots, k\}$ att $w_{\nu_j} = t_j$, vilket betyder att det enda sättet att erhålla $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ är att låta alla $t_j = 0$. (w_{ν_j} betecknar ν_j:te komponenten i vektorn $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$.)

De k st vektorerna $\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_k$ utgör därmed en bas till $\mathcal{N}(\mathbf{A})$.

2.5 En bas till $\mathcal{N}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$

Nu vet vi alltså hur man bestämmer en bas till $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ genom att först transformera $\mathbf{A}$ till trappstegsform med Gauss–Jordans metod och sedan använda metodiken i avsnitt 2.4 ovan. Men då kan man förstås på motsvarande sätt utgå från matrisen $\mathbf{A}^\mathsf{T}$, transformera denna till trappstegsform med Gauss–Jordans metod, och sedan bestämma en bas till $\mathcal{N}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$.
På köpet får man då dels en ny bas till $\mathcal{R}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$, dels en ny bas till $\mathcal{R}((\mathbf{A}^\mathsf{T})^\mathsf{T}) = \mathcal{R}(\mathbf{A})$.

Exempel 2.2 Antag som i Exempel 2.1 att $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 & -3 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & -1 \\ 3 & 6 & 2 & 5 & 1 \\ 4 & 8 & 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$.

Vi ska bestämma baser till de fyra fundamentala underrummen för denna matris.

Gauss–Jordans metod gav i Exempel 2.1 att

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{dvs} \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

En bas till $\mathcal{R}(\mathbf{A})$ erhålls genom att som basvektorer välja de kolonner i $\mathbf{A}$ som svarar mot trappstegsettor i $\mathbf{T}$, dvs i vårt fall kolonnerna nummer 1 och 3 i $\mathbf{A}$, dvs de två vektorerna $(1,\ 2,\ 3,\ 4)^{\mathsf{T}}$ och $(4,\ 3,\ 2,\ 1)^{\mathsf{T}}$.

En bas till $\mathcal{R}(\mathbf{A}^{\mathsf{T}})$ erhålls genom att som basvektorer välja kolonnerna i $\mathbf{U}^{\mathsf{T}}$, dvs de två vektorerna $(1,\ 2,\ 0,\ 1,\ 1)^{\mathsf{T}}$ och $(0,\ 0,\ 1,\ 1,\ -1)^{\mathsf{T}}$.

En bas till $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ kan bestämmas enligt följande:
Först sätts $x_2 = 1$ och $x_4 = x_5 = 0$, medan x_1 och x_3 väljs så att $\mathbf{Ux} = \mathbf{0}$.
Det ger den första basvektorn $(-2,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0)^{\mathsf{T}}$.
Sedan sätts $x_4 = 1$ och $x_2 = x_5 = 0$, medan x_1 och x_3 väljs så att $\mathbf{Ux} = \mathbf{0}$.
Det ger den andra basvektorn $(-1,\ 0,\ -1,\ 1,\ 0)^{\mathsf{T}}$.
Sluligen sätts $x_5 = 1$ och $x_2 = x_4 = 0$, medan x_1 och x_3 väljs så att $\mathbf{Ux} = \mathbf{0}$.
Det ger den tredje och sista basvektorn $(-1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1)^{\mathsf{T}}$.

För att bestämma en bas till $\mathcal{N}(\mathbf{A}^{\mathsf{T}})$ använder man först Gauss–Jordans metod på matrisen

$$\mathbf{A}^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \\ -3 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

för att överföra denna till trappstegsform.

Addition av -2 gånger första raden till andra raden, samt addition av -4 gånger första raden till tredje raden, samt addition av -5 gånger första raden till fjärde raden, samt addition av 3 gånger första raden till femte raden, ger till resultat matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -10 & -15 \\ 0 & -5 & -10 & -15 \\ 0 & 5 & 10 & 15 \end{bmatrix}.$$

Här låter vi raderna nummer 2 och 3 byta plats. Det ger till resultat matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -10 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -10 & -15 \\ 0 & 5 & 10 & 15 \end{bmatrix}.$$

Multiplikation av andra raden med faktorn $-1/5$ ger till resultat matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -10 & -15 \\ 0 & 5 & 10 & 15 \end{bmatrix}.$$

Addition av -2 gånger andra raden till första raden, samt addition av 5 gånger andra raden till fjärde raden, samt addition av -5 gånger andra raden till femte raden, ger till resultat matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Nu har vi erhållit en matris på trappstegsform med *två* trappstegsettor, nämligen 1:orna i kolonnerna nummer 1 och 2. Vår nya trappstegsmatris är alltså

$$\tilde{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{U}} \\ \mathbf{O} \end{bmatrix}, \quad \text{där } \tilde{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

En bas till $\mathcal{N}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$ kan nu bestämmas enligt följande:
Först sätts $x_3 = 1$ och $x_4 = 0$, medan x_1 och x_2 väljs så att $\tilde{\mathbf{U}}\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
Det ger den första basvektorn $(1,\ -2,\ 1,\ 0)^\mathsf{T}$.
Sedan sätts $x_4 = 1$ och $x_3 = 0$, medan x_1 och x_2 väljs så att $\tilde{\mathbf{U}}\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
Det ger den andra basvektorn $(2,\ -3,\ 0,\ 1)^\mathsf{T}$.

En (ny) bas till $\mathcal{R}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$ erhålls genom att som basvektorer välja de kolonner i $\mathbf{A}^\mathsf{T}$ som svarar mot trappstegsettor i $\tilde{\mathbf{U}}$, dvs kolonnerna nummer 1 och 2 i $\mathbf{A}^\mathsf{T}$, dvs de två vektorerna $(1,\ 2,\ 4,\ 5,\ -3)^\mathsf{T}$ och $(2,\ 4,\ 3,\ 5,\ -1)^\mathsf{T}$.

En (ny) bas till $\mathcal{R}((\mathbf{A}^\mathsf{T})^\mathsf{T}) = \mathcal{R}(\mathbf{A})$ erhålls genom att som basvektorer välja kolonnerna i $\tilde{\mathbf{U}}^\mathsf{T}$, dvs de två vektorerna $(1,\ 0,\ -1,\ -2)^\mathsf{T}$ och $(0,\ 1,\ 2,\ 3)^\mathsf{T}$.