Krister Svanberg, april 2012

1 Duala problem vid linjär optimering

Detta kapitel handlar om två centrala teoretiska resultat för LP, nämligen dualitetssatsen och komplementaritetssatsen. Först måste vi då definiera det så kallade *duala* problemet svarande mot ett givet LP-problem. Kopplingen mellan detta duala problem och det ursprungliga, *primala*, problemet blir som mest tilltalande om det primala problemet är på följande form, som ibland kallas för den *kanoniska* formen på LP-problem:

$$\begin{array}{lrl} \mathrm{P}: & \text{minimera} & \mathbf{c}^{\mathsf{T}}\mathbf{x} \\ & \text{då} & \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}, \\ & & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \end{array} \tag{1.1}$$

där $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ är variabelvektorn, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ och $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ är givna vektorer, medan $\mathbf{A}$ är en given $m \times n$-matris. Vi refererar till detta LP-problem som "det primala problemet P".
De m st bivillkoren $\mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}$ kallas *allmänna*, medan de n st bivillkoren $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ kallas *enkla*.
Mängden av $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ som uppfyller samtliga bivillkor i P kallas för det *tillåtna området* till P och betecknas $\mathcal{F}_P$, dvs

$$\mathcal{F}_P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b} \text{ och } \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}. \tag{1.2}$$

Till skillnad från vad som gällde för LP-problem på standardform, behöver vi för problem på kanonisk form inte göra några speciella antaganden om matrisen $\mathbf{A}$. Det går lika bra om $m > n$, $m < n$ eller $m = n$. Vidare behöver $\mathbf{A}$ varken ha linjärt oberoende kolonner eller linjärt oberoende rader.

1.1 Definition av det duala problem till ett LP-problem på kanonisk form

Det *duala* problemet D, svarande mot det ovanstående primala problemet P, definieras som följande problem:

$$\begin{array}{lrl} \mathrm{D}: & \text{maximera} & \mathbf{b}^{\mathsf{T}}\mathbf{y} \\ & \text{då} & \mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{y} \leq \mathbf{c}, \\ & & \mathbf{y} \geq \mathbf{0}, \end{array} \tag{1.3}$$

där $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ är variabelvektorn, medan $\mathbf{c}$, $\mathbf{b}$ och $\mathbf{A}$ är enligt ovan.
De n st bivillkoren $\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{y} \leq \mathbf{c}$ kallas *allmänna*, medan de m st bivillkoren $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$ kallas *enkla*.
Mängden av $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ som uppfyller samtliga bivillkor i D kallas för det *tillåtna området* till D och betecknas $\mathcal{F}_D$, dvs

$$\mathcal{F}_D = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m \mid \mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{y} \leq \mathbf{c} \text{ och } \mathbf{y} \geq \mathbf{0}\}. \tag{1.4}$$

1.2 Dualitetssatsen

Först några ytterligare definitioner:

Punkten $\mathbf{x} \in I\!R^n$ är en *tillåten lösning* till det primala problemet P om $\mathbf{x} \in \mathcal{F}_P$.
Punkten $\hat{\mathbf{x}} \in I\!R^n$ är en *optimal lösning* till problemet P om $\hat{\mathbf{x}} \in \mathcal{F}_P$ och dessutom $\mathbf{c}^\mathsf{T}\hat{\mathbf{x}} \leq \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x}$ för alla $\mathbf{x} \in \mathcal{F}_P$. *Optimalvärdet* till P ges då av $\mathbf{c}^\mathsf{T}\hat{\mathbf{x}}$.
Punkten $\mathbf{y} \in I\!R^m$ är en *tillåten lösning* till det duala problemet D om $\mathbf{y} \in \mathcal{F}_D$.
Punkten $\hat{\mathbf{y}} \in I\!R^m$ är en *optimal lösning* till problemet D om $\hat{\mathbf{y}} \in \mathcal{F}_D$ och dessutom $\mathbf{b}^\mathsf{T}\hat{\mathbf{y}} \geq \mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{y}$ för alla $\mathbf{y} \in \mathcal{F}_D$. *Optimalvärdet* till D ges då av $\mathbf{b}^\mathsf{T}\hat{\mathbf{y}}$.

Följande olikhet är fundamental:

$$\text{För varje } \mathbf{x} \in \mathcal{F}_P \text{ och varje } \mathbf{y} \in \mathcal{F}_D \text{ gäller att } \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{y}. \tag{1.5}$$

Bevis: Om $\mathbf{x} \in \mathcal{F}_P$ och $\mathbf{y} \in \mathcal{F}_D$ så är $\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} - \mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{y} = \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{c} - \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{y} + \mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{b} =$
$= \mathbf{x}^\mathsf{T}(\mathbf{c}-\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{y}) + \mathbf{y}^\mathsf{T}(\mathbf{A}\mathbf{x}-\mathbf{b}) \geq 0$, där den första likheten följer av att $\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{y} = \mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x}$, medan den avslutande olikheten följer av att $\mathbf{x} \in \mathcal{F}_P$ och $\mathbf{y} \in \mathcal{F}_D$, dvs av att $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, $\mathbf{c}-\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$, $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$ och $\mathbf{A}\mathbf{x}-\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$.

En omedelbar konsekvens av olikheten (1.5) är följande optimalitetsvillkor:

$$\text{Om } \hat{\mathbf{x}} \in \mathcal{F}_P,\ \hat{\mathbf{y}} \in \mathcal{F}_D \text{ och } \mathbf{c}^\mathsf{T}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{b}^\mathsf{T}\hat{\mathbf{y}} \text{ så är } \hat{\mathbf{x}} \text{ och } \hat{\mathbf{y}} \text{ optimala till P resp D.} \tag{1.6}$$

Bevis: För varje $\mathbf{x} \in \mathcal{F}_P$ och $\mathbf{y} \in \mathcal{F}_D$ så gäller, enligt (1.5), att $\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}^\mathsf{T}\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{c}^\mathsf{T}\hat{\mathbf{x}} \geq \mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{y}$, dvs $\mathbf{c}^\mathsf{T}\hat{\mathbf{x}} \leq \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x}$ och $\mathbf{b}^\mathsf{T}\hat{\mathbf{y}} \geq \mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{y}$, vilket innebär att $\hat{\mathbf{x}}$ är en optimal lösning till problemet P, medan $\hat{\mathbf{y}}$ är en optimal lösning till det duala problemet D.

Beviset av följande viktiga sats ges i kompendiet.

Sats: Om både $\mathcal{F}_P \neq \emptyset$ och $\mathcal{F}_D \neq \emptyset$ så finns det (minst) en optimal lösning $\hat{\mathbf{x}}$ till P och (minst) en optimal lösning $\hat{\mathbf{y}}$ till D. Dessa uppfyller att $\mathbf{c}^\mathsf{T}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{b}^\mathsf{T}\hat{\mathbf{y}}$.

Om $\mathcal{F}_P \neq \emptyset$ men $\mathcal{F}_D = \emptyset$ så finns det till varje tal $\rho \in I\!R$ (t.ex $\rho = -10^{99}$) ett $\mathbf{x} \in \mathcal{F}_P$ sådant att $\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} < \rho$. Man säger här att optimalvärdet till P $= -\infty$. Varken P eller D har i detta fall någon optimal lösning.

Om $\mathcal{F}_D \neq \emptyset$ men $\mathcal{F}_P = \emptyset$ så finns det till varje tal $\rho \in I\!R$ (t.ex $\rho = 10^{99}$) ett $\mathbf{y} \in \mathcal{F}_D$ sådant att $\mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{y} > \rho$. Man säger här att optimalvärdet till D $= +\infty$. Varken P eller D har i detta fall någon optimal lösning.

Slutligen kan det även inträffa att både $\mathcal{F}_P = \emptyset$ och $\mathcal{F}_D = \emptyset$, så att varken P eller D har några tillåtna lösningar.

Som en direkt konsekvens av denna sats får vi omvändningen till (1.6) ovan:

$$\text{Om } \hat{\mathbf{x}} \text{ och } \hat{\mathbf{y}} \text{ är optimala lösningar till P resp D så är } \mathbf{c}^\mathsf{T}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{b}^\mathsf{T}\hat{\mathbf{y}}. \tag{1.7}$$

1.3 Komplementaritetssatsen

Av (1.6) och (1.7) följer att $\hat{\mathbf{x}}$ och $\hat{\mathbf{y}}$ är optimala lösningar till P resp D om och endast om $\hat{\mathbf{x}} \in \mathcal{F}_P$, $\hat{\mathbf{y}} \in \mathcal{F}_D$ och $\mathbf{c}^\mathsf{T}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{b}^\mathsf{T}\hat{\mathbf{y}}$. Vi ska här ge ett alternativt (och ofta mer användbart) kriterium för när två tillåtna lösningar till P resp D även är optimala lösningar till P resp D.

Om $\mathbf{x} \in I\!\!R^n$ så låter vi $\mathbf{s} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}$. Då är $\mathbf{x} \in \mathcal{F}_P$ ekvivalent med att $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ och $\mathbf{s} \geq \mathbf{0}$.
Om $\mathbf{y} \in I\!\!R^m$ så låter vi $\mathbf{r} = \mathbf{c} - \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{y}$. Då är $\mathbf{y} \in \mathcal{F}_D$ ekvivalent med att $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$ och $\mathbf{r} \geq \mathbf{0}$.
Med hjälp av dessa beteckningar kan *komplementaritetssatsen* formuleras på följande sätt:

Sats: $\mathbf{x} \in I\!\!R^n$ är en optimal lösning till P och
$\mathbf{y} \in I\!\!R^m$ är en optimal lösning till D
om och endast om

$$\begin{aligned} &x_j \geq 0, \quad r_j \geq 0, \quad x_j r_j = 0 \quad \text{för } j = 1 \ldots n, \\ &y_i \geq 0, \quad s_i \geq 0, \quad y_i s_i = 0 \quad \text{för } i = 1 \ldots m, \end{aligned} \tag{1.8}$$

där $\mathbf{s} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}$ och $\mathbf{r} = \mathbf{c} - \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{y}$.

Bevis: Antag först att villkoren (1.8) är uppfyllda.
Då är $\mathbf{x} \in \mathcal{F}_P$ (ty $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ och $\mathbf{s} \geq \mathbf{0}$) samt $\mathbf{y} \in \mathcal{F}_D$ (ty $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$ och $\mathbf{r} \geq \mathbf{0}$).
Vidare är $\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} - \mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{y} = \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{c} - \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{y} + \mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{b} = \mathbf{x}^\mathsf{T}(\mathbf{c} - \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{y}) + \mathbf{y}^\mathsf{T}(\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}) =$
$= \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{r} + \mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{s} = \sum_{j=1}^n x_j r_j + \sum_{i=1}^m y_i s_i = 0$ (ty alla $x_j r_j = 0$ och alla $y_i s_i = 0$).
Därmed är $\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} = \mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{y}$, vilket enligt (1.6) medför att $\mathbf{x}$ är en optimal lösning till P och att $\mathbf{y}$ är en optimal lösning till D.
Antag nu omvänt att $\mathbf{x}$ är en optimal lösning till P och att $\mathbf{y}$ är en optimal lösning till D.
Då är $\mathbf{x}$ en tillåten lösning till P, så att $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ och $\mathbf{s} \geq \mathbf{0}$, medan $\mathbf{y}$ är en tillåten lösning till D, så att $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$ och $\mathbf{r} \geq \mathbf{0}$. Vidare gäller enligt (1.7) att $\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} = \mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{y}$, vilket ger att
$0 = \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} - \mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{y} = \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{c} - \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{y} + \mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{b} = \mathbf{x}^\mathsf{T}(\mathbf{c} - \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{y}) + \mathbf{y}^\mathsf{T}(\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}) =$
$= \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{r} + \mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{s} = \sum_{j=1}^n x_j r_j + \sum_{i=1}^m y_i s_i$. Notera att varje enskild term i var och en av dessa båda summor är icke-negativ (eftersom $x_j \geq 0$, $r_j \geq 0$, $y_i \geq 0$ och $s_i \geq 0$). Men enda möjligheten för en summa av icke-negativa termer att bli $= 0$ är att varje enskild term i summan är $= 0$. Därmed är alltså alla $x_j r_j = 0$ och alla $y_i s_i = 0$.

Som framgår av bevisets senare del är villkoren $x_j r_j = 0$ och $y_i s_i = 0$ i satsen ekvivalenta med villkoren att $\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{r} = 0$ och $\mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{s} = 0$, eftersom vi *vet* att alla dessa fyra vektorer är $\geq \mathbf{0}$ (annars vore de inte ekvivalenta förstås). Därför kan komplementaritetssatsen formuleras på följande kortare form:

$\mathbf{x} \in I\!\!R^n$ är en optimal lösning till P och $\mathbf{y} \in I\!\!R^m$ är en optimal lösning till D
om och endast om följande villkor är uppfyllda:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}, \quad \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{y} \leq \mathbf{c}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{y} \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{y}^\mathsf{T}(\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}) = 0, \quad \mathbf{x}^\mathsf{T}(\mathbf{c} - \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{y}) = 0. \tag{1.9}$$

I ord säger komplementaritetssatsen att nödvändiga och tillräckliga villkor för att en tillåten lösning till P och en tillåten lösning till D även ska vara *optimala* lösningar till P resp D är att det för varje $j \in \{1, \ldots, n\}$ gäller att antingen är det j:te *enkla* bivillkoret i problemet P uppfyllt med likhet eller också är det j:te *allmänna* bivillkoret i problemet D uppfyllt med likhet, samt att det för varje $i \in \{1, \ldots, m\}$ gäller att antingen är det i:te *enkla* bivillkoret i problemet D uppfyllt med likhet eller också är det i:te *allmänna* bivillkoret i problemet P uppfyllt med likhet.

1.4 Duala problemet till ett LP-problem på allmän form

Betrakta ett LP-problem på följande allmänna form.

$$
\begin{aligned}
\text{P}: \quad \text{minimera} \quad & \mathbf{c}_1^\mathsf{T}\mathbf{x}_1 + \mathbf{c}_2^\mathsf{T}\mathbf{x}_2 \\
\text{då} \quad & \mathbf{A}_{11}\mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_{12}\mathbf{x}_2 \geq \mathbf{b}_1, \\
& \mathbf{A}_{21}\mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_{22}\mathbf{x}_2 = \mathbf{b}_2, \\
& \mathbf{x}_1 \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{x}_2 \text{ fri},
\end{aligned}
\tag{1.10}
$$

där $\mathbf{c}_1 \in I\!R^{n_1}$, $\mathbf{c}_2 \in I\!R^{n_2}$, $\mathbf{b}_1 \in I\!R^{m_1}$ och $\mathbf{b}_2 \in I\!R^{m_2}$ är givna vektorer, $\mathbf{A}_{11} \in I\!R^{m_1 \times n_1}$, $\mathbf{A}_{12} \in I\!R^{m_1 \times n_2}$, $\mathbf{A}_{21} \in I\!R^{m_2 \times n_1}$ och $\mathbf{A}_{22} \in I\!R^{m_2 \times n_2}$ är givna matriser, medan $\mathbf{x}_1 \in I\!R^{n_1}$ och $\mathbf{x}_2 \in I\!R^{n_2}$ är variabelvektorerna. Att $\mathbf{x}_2$ är "fri" innebär att det inte finns något krav på att komponenterna i vektorn $\mathbf{x}_2$ ska vara icke-negativa.

Med hjälp av de knep som beskrevs i första föreläsningen kan detta problem (1.10) transformeras till ett ekvivalent problem på formen (1.1). Likhetsbivillkoren $\mathbf{A}_{21}\mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_{22}\mathbf{x}_2 = \mathbf{b}_2$ ersätts därvid med olikhetsbivillkoren $\mathbf{A}_{21}\mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_{22}\mathbf{x}_2 \geq \mathbf{b}_2$ och $-\mathbf{A}_{21}\mathbf{x}_1 - \mathbf{A}_{22}\mathbf{x}_2 \geq -\mathbf{b}_2$, medan de fria variablerna ersätts med differensen mellan teckenbegränsade variabler, dvs $\mathbf{x}_2 = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3$ där $\mathbf{v}_2 \geq \mathbf{0}$ och $\mathbf{v}_3 \geq \mathbf{0}$. Då erhålls problemet

$$
\begin{aligned}
\text{P}: \quad \text{minimera} \quad & \mathbf{c}_1^\mathsf{T}\mathbf{x}_1 + \mathbf{c}_2^\mathsf{T}\mathbf{v}_2 - \mathbf{c}_2^\mathsf{T}\mathbf{v}_3 \\
\text{då} \quad & \mathbf{A}_{11}\mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_{12}\mathbf{v}_2 - \mathbf{A}_{12}\mathbf{v}_3 \geq \mathbf{b}_1, \\
& \mathbf{A}_{21}\mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_{22}\mathbf{v}_2 - \mathbf{A}_{22}\mathbf{v}_3 \geq \mathbf{b}_2, \\
& -\mathbf{A}_{21}\mathbf{x}_1 - \mathbf{A}_{22}\mathbf{v}_2 + \mathbf{A}_{22}\mathbf{v}_3 \geq -\mathbf{b}_2, \\
& \mathbf{x}_1 \geq \mathbf{0}, \ \mathbf{v}_2 \geq \mathbf{0}, \ \mathbf{v}_3 \geq \mathbf{0},
\end{aligned}
\tag{1.11}
$$

som är ett problem på formen (1.1) med

$$
\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & -\mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & -\mathbf{A}_{22} \\ -\mathbf{A}_{21} & -\mathbf{A}_{22} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ -\mathbf{b}_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} \mathbf{c}_1 \\ \mathbf{c}_2 \\ -\mathbf{c}_2 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v}_3 \end{pmatrix}.
$$

För att ställa upp det motsvarande duala problemet inför vi variabelvektorn $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_3 \end{pmatrix}$,

samt noterar att $\mathbf{A}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}^\mathsf{T} & \mathbf{A}_{21}^\mathsf{T} & -\mathbf{A}_{21}^\mathsf{T} \\ \mathbf{A}_{12}^\mathsf{T} & \mathbf{A}_{22}^\mathsf{T} & -\mathbf{A}_{22}^\mathsf{T} \\ -\mathbf{A}_{12}^\mathsf{T} & -\mathbf{A}_{22}^\mathsf{T} & \mathbf{A}_{22}^\mathsf{T} \end{bmatrix}$.

Eftersom det duala problemet till (1.1) ges av (1.3), så ges det duala problemet till (1.11) därmed av följande problem:

$$
\begin{array}{lrl}
\mathrm{D:} & \text{maximera} & \mathbf{b}_1^{\mathsf{T}}\mathbf{y}_1 + \mathbf{b}_2^{\mathsf{T}}\mathbf{u}_2 - \mathbf{b}_2^{\mathsf{T}}\mathbf{u}_3 \\
 & \text{då} & \mathbf{A}_{11}^{\mathsf{T}}\mathbf{y}_1 + \mathbf{A}_{21}^{\mathsf{T}}\mathbf{u}_2 - \mathbf{A}_{21}^{\mathsf{T}}\mathbf{u}_3 \le \mathbf{c}_1, \\
 & & \mathbf{A}_{12}^{\mathsf{T}}\mathbf{y}_1 + \mathbf{A}_{22}^{\mathsf{T}}\mathbf{u}_2 - \mathbf{A}_{22}^{\mathsf{T}}\mathbf{u}_3 \le \mathbf{c}_2, \\
 & & -\mathbf{A}_{12}^{\mathsf{T}}\mathbf{y}_1 - \mathbf{A}_{22}^{\mathsf{T}}\mathbf{u}_2 + \mathbf{A}_{22}^{\mathsf{T}}\mathbf{u}_3 \le -\mathbf{c}_2, \\
 & & \mathbf{y}_1 \ge \mathbf{0},\ \mathbf{u}_2 \ge \mathbf{0},\ \mathbf{u}_3 \ge \mathbf{0}.
\end{array}
\tag{1.12}
$$

Här kan olikhetsbivillkoren $\mathbf{A}_{12}^{\mathsf{T}}\mathbf{y}_1 + \mathbf{A}_{22}^{\mathsf{T}}\mathbf{u}_2 - \mathbf{A}_{22}^{\mathsf{T}}\mathbf{u}_3 \le \mathbf{c}_2$ och $-\mathbf{A}_{12}^{\mathsf{T}}\mathbf{y}_1 - \mathbf{A}_{22}^{\mathsf{T}}\mathbf{u}_2 + \mathbf{A}_{22}^{\mathsf{T}}\mathbf{u}_3 \le -\mathbf{c}_2$ ersättas med likhetsbivillkoren $\mathbf{A}_{12}^{\mathsf{T}}\mathbf{y}_1 + \mathbf{A}_{22}^{\mathsf{T}}\mathbf{u}_2 - \mathbf{A}_{22}^{\mathsf{T}}\mathbf{u}_3 = \mathbf{c}_2$, varefter differensen mellan vektorerna $\mathbf{u}_2$ och $\mathbf{u}_3$ kan ersättas med en vektor $\mathbf{y}_2$, dvs $\mathbf{y}_2 = \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3$, som inte är teckenbegränsad. Då erhålls följande problem i variabelvektorerna $\mathbf{y}_1 \in I\!R^{m_1}$ och $\mathbf{y}_2 \in I\!R^{m_2}$.

$$
\begin{array}{lrl}
\mathrm{D:} & \text{maximera} & \mathbf{b}_1^{\mathsf{T}}\mathbf{y}_1 + \mathbf{b}_2^{\mathsf{T}}\mathbf{y}_2 \\
 & \text{då} & \mathbf{A}_{11}^{\mathsf{T}}\mathbf{y}_1 + \mathbf{A}_{21}^{\mathsf{T}}\mathbf{y}_2 \le \mathbf{c}_1, \\
 & & \mathbf{A}_{12}^{\mathsf{T}}\mathbf{y}_1 + \mathbf{A}_{22}^{\mathsf{T}}\mathbf{y}_2 = \mathbf{c}_2, \\
 & & \mathbf{y}_1 \ge \mathbf{0},\ \ \mathbf{y}_2\ \text{fri},
\end{array}
\tag{1.13}
$$

Detta problem (1.13) utgör alltså det duala problemet till (1.10).

1.5 Duala problemet till ett LP-problem på standardform

Betrakta nu ett LP-problem på standardform, dvs

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}: \qquad \text{minimera} \quad & \mathbf{c}^{\mathsf{T}}\mathbf{x} \\
\text{då} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \\
& \mathbf{x} \geq \mathbf{0}.
\end{aligned}
\tag{1.14}
$$

Detta är det specialfall av problemet (1.10) som erhålls om man där låter $\mathbf{A}_{21} = \mathbf{A}$, $\mathbf{c}_1 = \mathbf{c}$, $\mathbf{b}_2 = \mathbf{b}$ och $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}$, medan matriserna och vektorerna $\mathbf{A}_{11}$, $\mathbf{A}_{12}$, $\mathbf{A}_{22}$ $\mathbf{c}_2$, $\mathbf{b}_1$ och $\mathbf{x}_2$ samtliga lämnas "tomma" (dvs icke närvarande). Det duala problem till (1.14) är därmed motsvarande specialfall (med $\mathbf{A}_{21} = \mathbf{A}$, etc.) till problemet (1.13), dvs, med $\mathbf{y}_2 = \mathbf{y}$,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{D}: \qquad \text{maximera} \quad & \mathbf{b}^{\mathsf{T}}\mathbf{y} \\
\text{då} \quad & \mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{y} \leq \mathbf{c}.
\end{aligned}
\tag{1.15}
$$

Detta problem (1.15) utgör alltså det duala problemet till (1.14).

Antag att vi har löst ett givet problem på formen (1.14) med den version av simplexmetoden som beskrevs i föreläsning 3, och antag att vi avbrutit algoritmen på grund av att $\mathbf{r}_\nu \geq \mathbf{0}$. Då gäller att $\mathbf{A}_\beta\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{b}$, $\bar{\mathbf{b}} \geq \mathbf{0}$, $\mathbf{A}_\beta^{\mathsf{T}}\mathbf{y} = \mathbf{c}_\beta$ och $\mathbf{A}_\nu^{\mathsf{T}}\mathbf{y} \leq \mathbf{c}_\nu$ (eftersom $\mathbf{r}_\nu = \mathbf{c}_\nu - \mathbf{A}_\nu^{\mathsf{T}}\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$).

Låt vektorn $\mathbf{x} \in I\!\!R^n$ definieras av att $\mathbf{x}_\beta = \bar{\mathbf{b}}$ och $\mathbf{x}_\nu = \mathbf{0}$ (så att $\mathbf{x}$ är den aktuella baslösningen). Då är $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ och $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}_\beta\mathbf{x}_\beta + \mathbf{A}_\nu\mathbf{x}_\nu = \mathbf{A}_\beta\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{b}$, vilket innebär att $\mathbf{x}$ är en tillåten lösning till det primala problemet (1.14), förstås!

Vidare är $\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{y} \leq \mathbf{c}$, eftersom $\mathbf{A}_\beta^{\mathsf{T}}\mathbf{y} = \mathbf{c}_\beta$ och $\mathbf{A}_\nu^{\mathsf{T}}\mathbf{y} \leq \mathbf{c}_\nu$, vilket innebär att vektorn $\mathbf{y} \in I\!\!R^m$ är en tillåten lösning till det duala problemet (1.15).

Slutligen är $\mathbf{c}^{\mathsf{T}}\mathbf{x} = \mathbf{c}_\beta^{\mathsf{T}}\mathbf{x}_\beta + \mathbf{c}_\nu^{\mathsf{T}}\mathbf{x}_\nu = \mathbf{c}_\beta^{\mathsf{T}}\mathbf{x}_\beta = (\mathbf{A}_\beta^{\mathsf{T}}\mathbf{y})^{\mathsf{T}}\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{y}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}_\beta\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{y}^{\mathsf{T}}\mathbf{b} = \mathbf{b}^{\mathsf{T}}\mathbf{y}$.

Följande gäller alltså: För det första är $\mathbf{x}$ en tillåten lösning till det primala problemet. För det andra är $\mathbf{y}$ en tillåten lösning till det duala problemet. För det tredje är $\mathbf{c}^{\mathsf{T}}\mathbf{x} = \mathbf{b}^{\mathsf{T}}\mathbf{y}$. Tillsammans medför detta att $\mathbf{x}$ är en optimal lösning till det primala problemet (1.14), vilket vi redan visste, men också att $\mathbf{y}$ är en optimal lösning till det duala problemet (1.15)!

När vi har löst det primala problemet (1.14) med simplexmetoden, och hittat en optimal lösning $\mathbf{x}$, så har vi alltså även beräknat en optimal lösning $\mathbf{y}$ till det duala problemet (1.15).