Krister Svanberg, april 2012

1 Konvexa optimeringsproblem – grundläggande egenskaper

Ett optimeringsproblem är i viss mening godartat om det tillåtna området är en *konvex* mängd och den målfunktion som ska minimeras är en *konvex* funktion på denna mängd.
I detta kapitel behandlas några grundläggande egenskaper hos denna typ av problem.
Det *öppna intervallet* mellan 0 och 1, dvs mängden $\{t \in I\!R \mid 0 < t < 1\}$, betecknas $(0, 1)$.

1.1 Konvexa mängder i $I\!R^n$

Def: En given mängd $C \subseteq I\!R^n$ är *konvex* om det för varje $\mathbf{x} \in C$, $\mathbf{y} \in C$ och $t \in (0, 1)$ gäller att $(1-t)\,\mathbf{x} + t\,\mathbf{y} \in C$, dvs $\mathbf{x} + t\,(\mathbf{y}-\mathbf{x}) \in C$.

I ord säger denna definition att C är en konvex mängd om det för varje par av punkter $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$ som ligger i C gäller att varje punkt på linjestycket mellan $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$ också ligger i C.
I $I\!R^2$ utgör exempelvis området innanför en ellips en konvex mängd, liksom området innanför en triangel eller en rektangel. Däremot är området innanför en tvådimensionell "julstjärna" inte en konvex mängd.

Exempel: Om $\mathbf{A} \in I\!R^{m\times n}$ är en given matris och $\mathbf{b} \in I\!R^m$ är en given vektor så är mängden $\{\mathbf{x} \in I\!R^n \mid \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}\}$ konvex. Ty antag att både $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$ tillhör mängden, dvs att $\mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}$ och $\mathbf{Ay} \geq \mathbf{b}$, och låt $\mathbf{w} = (1-t)\,\mathbf{x} + t\,\mathbf{y}$ där $t \in (0, 1)$. Då gäller att $\mathbf{Aw} = (1-t)\,\mathbf{Ax} + t\,\mathbf{Ay} \geq (1-t)\,\mathbf{b} + t\,\mathbf{b} = \mathbf{b}$, vilket betyder att även $\mathbf{w}$ tillhör mängden.

1.2 Konvexa funktioner och strikt konvexa funktioner

Def: Låt $C \subseteq I\!R^n$ vara en given konvex mängd och f en reellvärd funktion definierad på C.
f är en *konvex* funktion på C om följande olikhet är uppfylld för varje $\mathbf{x} \in C$, $\mathbf{y} \in C$ och $t \in (0, 1)$: $\quad f((1-t)\,\mathbf{x} + t\,\mathbf{y}) \leq (1-t) f(\mathbf{x}) + t f(\mathbf{y})$.
En ofta användbar ekvivalent form på ovanstående olikhet är följande:
$f(\mathbf{x} + t\,(\mathbf{y}-\mathbf{x})) \leq f(\mathbf{x}) + t\,(f(\mathbf{y})-f(\mathbf{x}))$.
Om vänsterledet är strikt mindre än högerledet (dvs $<$) för alla $\mathbf{x} \in C$ och $\mathbf{y} \in C$ med $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ så är f en *strikt konvex* funktion på C.

Definitionen kan geometriskt tolkas som att varje linjär interpolation av en konvex funktion ligger "ovanför" grafen till funktionen.

I envariabelfallet (dvs $n = 1$) är bland andra följande funktioner konvexa på $C = I\!R$:
$f(x) = x$, $f(x) = x^2$, $f(x) = x^4$, $f(x) = e^x$, $f(x) = e^{-x}$ och $f(x) = |x|$.
Samtliga utom den första och den sista är dessutom strikt konvexa.

Lemma: Antag att C är en konvex mängd och att f och g är två konvexa funktioner på C.
Låt funktionen h definieras av att $h(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})$ för alla $\mathbf{x} \in C$.
Då är h en konvex funktion på C.

Bevis: För varje $\mathbf{x} \in C$, $\mathbf{y} \in C$ och $t \in (0,1)$ gäller att:

$h((1-t)\,\mathbf{x} + t\,\mathbf{y}) = f((1-t)\,\mathbf{x} + t\,\mathbf{y}) + g((1-t)\,\mathbf{x} + t\,\mathbf{y}) \leq$
$\leq (1-t)f(\mathbf{x}) + tf(\mathbf{y}) + (1-t)g(\mathbf{x}) + tg(\mathbf{y}) =$
$= (1-t)(f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})) + t\,(f(\mathbf{y}) + g(\mathbf{y})) = (1-t)h(\mathbf{x}) + t\,h(\mathbf{y})$,
vilket visar att h är konvex på C.

1.3 Konvexa optimeringsproblem

Låt $\mathcal{F} \subseteq I\!R^n$ vara en given konvex mängd och låt f vara en given konvex funktion på $\mathcal{F}$.
Då säges följande problem KP vara ett *konvext optimeringsproblem*:

$$\begin{aligned} \text{KP}: \qquad \text{minimera} \quad & f(\mathbf{x}) \\ \text{då} \quad & \mathbf{x} \in \mathcal{F}. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Funktionen f kallas *målfunktionen* till problemet KP.
Mängden $\mathcal{F}$ kallas *tillåtna området* till problemet KP.
$\mathbf{x} \in I\!R^n$ är en *tillåten lösning* (eller *tillåten punkt*) till problemet KP om $\mathbf{x} \in \mathcal{F}$.
$\hat{\mathbf{x}} \in I\!R^n$ är en *optimal lösning* om $\hat{\mathbf{x}} \in \mathcal{F}$ och dessutom $f(\hat{\mathbf{x}}) \leq f(\mathbf{x})$ för alla $\mathbf{x} \in \mathcal{F}$.

1.4 Optimalmängden till konvexa optimeringsproblem

Optimalmängden till det konvexa optimeringsproblemet (1.1) definieras som mängden av optimala lösningar till problemet. Ett av följande tre alternativ gäller alltid:

(i) Optimalmängden är tom.
(ii) Optimalmängden består av en enda optimal lösning $\hat{\mathbf{x}}$.
(iii) Optimalmängden består av flera olika optimala lösningar.

Ett exempel på (i) erhålls med $\mathcal{F} = I\!R^2$ och $f(\mathbf{x}) = e^{-x_1 - x_2}$.
Ett exempel på (ii) erhålls med $\mathcal{F} = I\!R^2$ och $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2$.
Ett exempel på (iii) erhålls med $\mathcal{F} = I\!R^2$ och $f(\mathbf{x}) = (x_1 - x_2)^2$.

Angående alternativ (iii) kan följande sägas:

Lemma: Om det finns fler än en optimal lösning till problemet (1.1) så finns det oändligt många optimala lösningar, och optimalmängden är en konvex mängd i $I\!R^n$.

Följande lemma visar att alternativ (iii) aldrig kan gälla om målfunktionen är strikt konvex.

Lemma: Om f är *strikt* konvex (och $\mathcal{F}$ är konvex) så har (1.1) *högst en* optimal lösning.

Att bevisa dessa båda lemman är en lämplig (och inte särskilt svår) övningsuppgift.

1.5 Tillåtna riktningar och avtaganderiktningar i en given tillåten punkt

Givet en tillåten punkt $\mathbf{x} \in \mathcal{F}$ så vill man ibland veta i vilka riktningar det är möjligt att gå utan att omedelbart hamna utanför $\mathcal{F}$. Ibland vill man även veta i vilka riktningar som målfunktionen avtar (dvs i vilka riktningar som grafen till funktionen "lutar nedåt").

Def: Vektorn $\mathbf{d} \in I\!R^n$ är en *tillåten riktning* i punkten $\mathbf{x} \in \mathcal{F}$
om det finns ett tal $\varepsilon > 0$ sådant att $\mathbf{x} + t\,\mathbf{d} \in \mathcal{F}$ för alla $t \in (0, \varepsilon)$.
Vektorn $\mathbf{d} \in I\!R^n$ är en *avtaganderiktning* till målfunktionen f i punkten $\mathbf{x} \in \mathcal{F}$
om det finns ett tal $\varepsilon > 0$ sådant att $f(\mathbf{x} + t\,\mathbf{d}) < f(\mathbf{x})$ för alla $t \in (0, \varepsilon)$.
Vektorn $\mathbf{d} \in I\!R^n$ är en *tillåten avtaganderiktning* i punkten $\mathbf{x} \in \mathcal{F}$
om $\mathbf{d}$ är *både* en tillåten riktning och en avtaganderiktning i $\mathbf{x}$.

1.6 Tillåtna avtaganderiktningar och optimalitet

Följande sats är mycket användbar när man ska avgöra huruvida en given punkt $\hat{\mathbf{x}}$ är en optimal lösning till problemet KP eller inte.

Sats: En given punkt $\hat{\mathbf{x}} \in \mathcal{F}$ är en optimal lösning till problemet KP, dvs till (1.1), om och endast om det *inte* finns någon tillåten avtaganderiktning i $\hat{\mathbf{x}}$.

Bevis: Antag först att det finns en tillåten avtaganderiktning $\mathbf{d}$ i $\hat{\mathbf{x}}$.
Då finns det ett tal $\varepsilon_1 > 0$ sådant att $\hat{\mathbf{x}} + t\,\mathbf{d} \in \mathcal{F}$ för alla $t \in (0, \varepsilon_1)$.
Vidare finns det ett tal $\varepsilon_2 > 0$ sådant att $f(\hat{\mathbf{x}} + t\,\mathbf{d}) < f(\hat{\mathbf{x}})$ för alla $t \in (0, \varepsilon_2)$.
Låt nu $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ = det minsta av talen ε_1 och ε_2.
Då är $\varepsilon > 0$, och för varje $t \in (0, \varepsilon)$ gäller dels att $\hat{\mathbf{x}} + t\,\mathbf{d} \in \mathcal{F}$, dels att $f(\hat{\mathbf{x}} + t\,\mathbf{d}) < f(\hat{\mathbf{x}})$, vilket innebär att $\hat{\mathbf{x}}$ inte är en optimal lösning till problemet KP.

Antag omvänt att $\hat{\mathbf{x}} \in \mathcal{F}$ inte är en optimal lösning till problemet KP.
Då finns det (minst) en punkt $\mathbf{y} \in \mathcal{F}$ sådan att $f(\mathbf{y}) < f(\hat{\mathbf{x}})$.
Vi ska visa att vektorn $\mathbf{d} = \mathbf{y} - \hat{\mathbf{x}}$ är en tillåten avtaganderiktning i $\hat{\mathbf{x}}$.
Låt $\mathbf{x}(t) = \hat{\mathbf{x}} + t\,\mathbf{d}$ för $t \in (0, 1)$, där alltså $\mathbf{d} = \mathbf{y} - \hat{\mathbf{x}}$, dvs $\mathbf{x}(t) = \hat{\mathbf{x}} + t\,(\mathbf{y} - \hat{\mathbf{x}})$.
Att $\mathcal{F}$ är en konvex mängd medför att $\mathbf{x}(t) \in \mathcal{F}$ för alla $t \in (0, 1)$, vilket i sin tur medför att $\mathbf{d}$ är en tillåten riktning i $\hat{\mathbf{x}}$. Att f är en konvex funktion medför att $f(\mathbf{x}(t)) = f(\hat{\mathbf{x}} + t\,(\mathbf{y} - \hat{\mathbf{x}})) \leq$ $\leq f(\hat{\mathbf{x}}) + t\,(f(\mathbf{y}) - f(\hat{\mathbf{x}})) < f(\hat{\mathbf{x}})$ för alla $t \in (0, 1)$, så att $\mathbf{d}$ är en avtaganderiktning i $\hat{\mathbf{x}}$.

2 Minimering av en kvadratisk funktion utan några bivillkor

En funktion $f : I\!R^n \to I\!R$ är en *kvadratisk funktion* om den kan skrivas på formen

$$f(\mathbf{x}) = \tfrac{1}{2}\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} + c_0, \tag{2.1}$$

där $\mathbf{H} \in I\!R^{n\times n}$ är en given symmetrisk matris, $\mathbf{c} \in I\!R^n$ är en given vektor och $c_0 \in I\!R$ är en given konstant. $\mathbf{x} \in I\!R^n$ är som vanligt variabelvektorn.

Antag exempelvis att $n = 3$ och att

$$f(\mathbf{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - x_1x_2 - 2x_2x_3 + x_3x_1 + 5x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 8. \tag{2.2}$$

Då kan $f(\mathbf{x})$ skrivas på formen (2.1) med

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad c_0 = 8. \tag{2.3}$$

Punkten $\hat{\mathbf{x}} \in I\!R^n$ är en *minimalpunkt* till f om $f(\hat{\mathbf{x}}) \le f(\mathbf{x})$ för alla $\mathbf{x} \in I\!R^n$.
f är *nedåt begränsad* om det finns ett tal $\mu \in I\!R$ sådant att $f(\mathbf{x}) \ge \mu$ för alla $\mathbf{x} \in I\!R^n$.
Om f inte är nedåt begränsad så är f nedåt obegränsad i enlighet med följande definition:
f är *nedåt obegränsad* om det till varje tal $\mu \in I\!R$ (t ex $\mu = -10^{99}$) finns minst ett $\mathbf{x} \in I\!R^n$ sådant att $f(\mathbf{x}) < \mu$. Om f är nedåt obegränsad så kan det inte finnas någon minimalpunkt $\hat{\mathbf{x}}$ till f, ty vilken punkt $\hat{\mathbf{x}}$ man än föreslår så finns det alltid någon annan punkt $\mathbf{x}$ med $f(\mathbf{x}) < f(\hat{\mathbf{x}})$. (Sätt bara $\mu = f(\hat{\mathbf{x}})$ i ovanstående definition av nedåt obegränsad.)

2.1 Taylorutveckling av en kvadratisk funktion

Följande samband är användbart. Det gäller för samtliga $\mathbf{x} \in I\!R^n$, $\mathbf{d} \in I\!R^n$ och $t \in I\!R$, förutsatt att f är definierad enligt (2.1) med $\mathbf{H}$ symmetrisk.

$$f(\mathbf{x} + t\,\mathbf{d}) = f(\mathbf{x}) + t\,(\mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{c})^\mathsf{T}\mathbf{d} + \tfrac{1}{2}\,t^2\,\mathbf{d}^\mathsf{T}\mathbf{H}\mathbf{d}. \tag{2.4}$$

Beviset av (2.4) består av följande rättframma kalkyler.

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x} + t\,\mathbf{d}) &= \tfrac{1}{2}\,(\mathbf{x} + t\,\mathbf{d})^\mathsf{T}\mathbf{H}\,(\mathbf{x} + t\,\mathbf{d}) + \mathbf{c}^\mathsf{T}(\mathbf{x} + t\,\mathbf{d}) + c_0 = \\ &= \tfrac{1}{2}\,(\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{H}\mathbf{x} + t\,\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{H}\mathbf{d} + t\,\mathbf{d}^\mathsf{T}\mathbf{H}\mathbf{x} + t^2\,\mathbf{d}^\mathsf{T}\mathbf{H}\mathbf{d}) + \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} + t\,\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{d} + c_0 = \\ &= \tfrac{1}{2}\,\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} + c_0 + t\,(\tfrac{1}{2}\,\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{H}\mathbf{d} + \tfrac{1}{2}\,\mathbf{d}^\mathsf{T}\mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{d}) + \tfrac{1}{2}\,t^2\,\mathbf{d}^\mathsf{T}\mathbf{H}\mathbf{d} = \\ &= f(\mathbf{x}) + t\,(\mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{c})^\mathsf{T}\mathbf{d} + \tfrac{1}{2}\,t^2\,\mathbf{d}^\mathsf{T}\mathbf{H}\mathbf{d}. \end{aligned}$$

Om man i (2.4) sätter $t = 1$ och $\mathbf{d} = \mathbf{y} - \mathbf{x}$ så erhålls sambandet

$$f(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + (\mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{c})^\mathsf{T}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) + \tfrac{1}{2}\,(\mathbf{y} - \mathbf{x})^\mathsf{T}\mathbf{H}(\mathbf{y} - \mathbf{x}), \tag{2.5}$$

som gäller för alla $\mathbf{x} \in I\!R^n$ och $\mathbf{y} \in I\!R^n$, där alltså f är enligt (2.1) med $\mathbf{H}$ symmetrisk.

Anmärkning: Det kanske kan vara intressant att notera att (2.4) och (2.5) är ekvivalenta med en Taylorutveckling av funktionen f i punkten $\mathbf{x}$. Enligt Taylors formel gäller exempelvis att

$$f(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + \nabla f(\mathbf{x})(\mathbf{y}-\mathbf{x}) + \tfrac{1}{2}\,(\mathbf{y}-\mathbf{x})^{\mathsf{T}}\nabla^2 f(\mathbf{x})(\mathbf{y}-\mathbf{x}) + \text{ en restterm,} \tag{2.6}$$

där $\nabla f(\mathbf{x}) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}),\ \cdots,\dfrac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x})\right)$ är *gradienten* av f i $\mathbf{x}$, medan $\nabla^2 f(\mathbf{x})$ är *hessianen* av f i $\mathbf{x}$, en matris med elementen $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x})$, för $i = 1,\ldots,n$ och $j = 1,\ldots,n$.
Det är lätt att derivera den kvadratiska funktionen f, definierad av (2.1) med $\mathbf{H}$ symmetrisk, och då erhålls att $\nabla f(\mathbf{x}) = (\mathbf{Hx}+\mathbf{c})^{\mathsf{T}}$ och $\nabla^2 f(\mathbf{x}) = \mathbf{H}$. Vidare blir resttermen alltid $= 0$ då man tar med alla termer upp till och med andra graden vid Taylorutveckling av en kvadratisk funktion. Därför är (2.5) och (2.6) ekvivalenta.

Formlerna (2.4) och (2.5) kommer att användas ganska ofta i fortsättningen, men ekvivalensen mellan (2.5) och (2.6) utnyttjas inte explicit i detta häfte.

2.2 Konvexa och strikt konvexa kvadratiska funktioner

Vilka kvadratiska funktioner är konvexa? Svaret ges av följande lemma.

Lemma: Den kvadratiska funktionen f i (2.1), med $\mathbf{H}$ symmetrisk,
är *konvex* på $\mathbb{R}^n$ om och endast om $\mathbf{H}$ är positivt semidefinit,
och *strikt konvex* på $\mathbb{R}^n$ om och endast om $\mathbf{H}$ är positivt definit.

Bevis: Enligt definitionen är f en konvex funktion på $\mathbb{R}^n$ om och endast om
$f(\mathbf{x}+t\,(\mathbf{y}-\mathbf{x})) \le f(\mathbf{x}) + t\,(f(\mathbf{y})-f(\mathbf{x}))$ för alla $t \in (0,1)$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ och $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$,
och f är strikt konvex på $\mathbb{R}^n$ om och endast om
$f(\mathbf{x}+t\,(\mathbf{y}-\mathbf{x})) < f(\mathbf{x}) + t\,(f(\mathbf{y})-f(\mathbf{x}))$ för alla $t \in (0,1)$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ och $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ med $\mathbf{x} \ne \mathbf{y}$.
För vänsterledet i olikheten gäller, enligt (2.4) med $\mathbf{d} = \mathbf{y}-\mathbf{x}$, att
$f(\mathbf{x}+t\,(\mathbf{y}-\mathbf{x})) = f(\mathbf{x}) + t\,(\mathbf{Hx}+\mathbf{c})^{\mathsf{T}}(\mathbf{y}-\mathbf{x}) + \frac{1}{2}\,t^2\,(\mathbf{y}-\mathbf{x})^{\mathsf{T}}\mathbf{H}(\mathbf{y}-\mathbf{x})$.
För högerledet i olikheten gäller, med utnyttjande av (2.5), att
$f(\mathbf{x}) + t\,(f(\mathbf{y})-f(\mathbf{x})) = f(\mathbf{x}) + t\,(f(\mathbf{x}) + (\mathbf{Hx}+\mathbf{c})^{\mathsf{T}}(\mathbf{y}-\mathbf{x}) + \frac{1}{2}\,(\mathbf{y}-\mathbf{x})^{\mathsf{T}}\mathbf{H}(\mathbf{y}-\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})) =$
$f(\mathbf{x}) + t\,(\mathbf{Hx}+\mathbf{c})^{\mathsf{T}}(\mathbf{y}-\mathbf{x}) + \frac{1}{2}\,t\,(\mathbf{y}-\mathbf{x})^{\mathsf{T}}\mathbf{H}(\mathbf{y}-\mathbf{x})$.
Därmed ges högerledet minus vänsterledet av uttrycket $\frac{1}{2}\,t\,(1-t)(\mathbf{y}-\mathbf{x})^{\mathsf{T}}\mathbf{H}(\mathbf{y}-\mathbf{x})$.
Men detta uttryck är ≥ 0 för alla $t \in (0,1)$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ och $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ om och endast om matrisen $\mathbf{H}$ är positivt semidefinit, och det är > 0 för alla $t \in (0,1)$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ och $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ med $\mathbf{x} \ne \mathbf{y}$ om och endast om matrisen $\mathbf{H}$ är positivt definit.

2.3 Avtaganderiktningar i en given tillåten punkt

För såväl konvexa som icke-konvexa kvadratiska funktioner gäller följande lemma.

Lemma: Antag att f är enligt (2.1), med $\mathbf{H}$ symmetrisk.
Ett tillräckligt villkor för att $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$ ska vara en avtagande-riktning till f i punkten $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ är att $(\mathbf{Hx}+\mathbf{c})^{\mathsf{T}}\mathbf{d} < 0$.

Bevis: Antag att $(\mathbf{Hx}+\mathbf{c})^\mathsf{T}\mathbf{d} < 0$. Sätt $q = -2(\mathbf{Hx}+\mathbf{c})^\mathsf{T}\mathbf{d} > 0$. Med hjälp av (2.4) erhålls då att $f(\mathbf{x}+t\,\mathbf{d}) = f(\mathbf{x}) + t\,(\mathbf{Hx}+\mathbf{c})^\mathsf{T}\mathbf{d} + \frac{1}{2}\,t^2\,\mathbf{d}^\mathsf{T}\mathbf{Hd} = f(\mathbf{x}) + \frac{1}{2}\,t\,(-q + t\,\mathbf{d}^\mathsf{T}\mathbf{Hd}) < f(\mathbf{x})$ för alla $t > 0$ sådana att $t\,\mathbf{d}^\mathsf{T}\mathbf{Hd} < q$, där alltså $q > 0$ enligt ovan.
Detta visar att $\mathbf{d}$ är en avtaganderiktning i punkten $\mathbf{x}$.

För *konvexa* kvadratiska funktioner gäller även omvändningen till ovanstående lemma.

Lemma: Antag att f är enligt (2.1), med $\mathbf{H}$ symmetrisk och positivt semidefinit. Ett nödvändigt och tillräckligt villkor för att $\mathbf{d} \in I\!R^n$ ska vara en avtaganderiktning till f i punkten $\mathbf{x} \in I\!R^n$ är att $(\mathbf{Hx}+\mathbf{c})^\mathsf{T}\mathbf{d} < 0$.

Bevis: Det återstår att visa att om $(\mathbf{Hx}+\mathbf{c})^\mathsf{T}\mathbf{d} \geq 0$ så är $\mathbf{d}$ *inte* en avtaganderiktning i $\mathbf{x}$.
Antag alltså att $(\mathbf{Hx}+\mathbf{c})^\mathsf{T}\mathbf{d} \geq 0$. Med hjälp av (2.4) erhålls då att
$f(\mathbf{x}+t\,\mathbf{d}) = f(\mathbf{x}) + t\,(\mathbf{Hx}+\mathbf{c})^\mathsf{T}\mathbf{d} + \frac{1}{2}\,t^2\,\mathbf{d}^\mathsf{T}\mathbf{Hd} \geq f(\mathbf{x})$ för alla $t \geq 0$, eftersom $\mathbf{d}^\mathsf{T}\mathbf{Hd} \geq 0$, vilket visar att $\mathbf{d}$ nu inte är en avtaganderiktning i punkten $\mathbf{x}$.

2.4 Minimering av en icke-konvex kvadratisk funktion utan bivillkor

Antag att den kvadratiska funktionen f ej är konvex, dvs att $\mathbf{H}$ ej är positivt semidefinit.
Då finns det vektorer $\mathbf{d} \in I\!R^n$ sådana att $\mathbf{d}^\mathsf{T}\mathbf{Hd} < 0$.
Låt $\mathbf{d}$ vara en sådan vektor, sätt $\mathbf{x}(t) = t\,\mathbf{d}$, där $t \in I\!R$, och låt $t \to +\infty$.
Då erhålls att $f(\mathbf{x}(t)) = f(t\,\mathbf{d}) = \frac{1}{2}t^2\mathbf{d}^\mathsf{T}\mathbf{Hd} + t\,\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{d} + c_0 \to -\infty$,
eftersom koefficienten $\frac{1}{2}\mathbf{d}^\mathsf{T}\mathbf{Hd}$ som multiplicerar t^2 är negativ.
Det betyder att f är nedåt obegränsad, vilket i sin tur medför att det inte finns någon minimalpunkt till f. I fortsättningen av detta kapitel kommer vi därför att förutsätta att f är konvex, dvs att $\mathbf{H}$ är positivt semidefinit.

2.5 Minimering av en konvex kvadratisk funktion utan bivillkor

Nu förutsätts att $\mathbf{H}$ är positivt semidefinit, så att den kvadratiska funktionen f är konvex. Eftersom dessutom det tillåtna området $\mathcal{F} = I\!R^n$ är en konvex mängd, så är problemet att bestämma en minimalpunkt till f ett konvext optimeringsproblem av typen (1.1), som i detta fall kan skrivas

$$\begin{aligned} \text{minimera} \quad & \tfrac{1}{2}\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{Hx} + \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} + c_0 \\ \text{då} \quad & \mathbf{x} \in I\!R^n. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Sats: Antag att $\mathbf{H}$ är positivt semidefinit. Då är punkten $\hat{\mathbf{x}} \in I\!R^n$ en optimal lösning till problemet (2.7) om och endast om $\mathbf{H}\hat{\mathbf{x}} = -\mathbf{c}$.

Bevis: Problemet är konvext, så $\hat{\mathbf{x}}$ är en optimal lösning om och endast om det inte finns någon tillåten avtaganderiktning till målfunktionen i punkten $\hat{\mathbf{x}}$, se satsen i avsnitt 1.6.
Men eftersom tillåtna området är hela $I\!R^n$ så är varje vektor $\mathbf{d} \in I\!R^n$ en tillåten riktning i $\hat{\mathbf{x}}$, och enligt avsnitt 2.3 är $\mathbf{d} \in I\!R^n$ en avtaganderiktning i $\hat{\mathbf{x}}$ om och endast om $(\mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}+\mathbf{c})^\mathsf{T}\mathbf{d} < 0$.
Alltså är $\hat{\mathbf{x}}$ en optimal lösning om och endast om $(\mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}+\mathbf{c})^\mathsf{T}\mathbf{d} \geq 0$ för alla vektorer $\mathbf{d} \in I\!R^n$, vilket i sin tur är uppfyllt om och endast om $\mathbf{H}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$, dvs om och endast om $\mathbf{H}\hat{\mathbf{x}} = -\mathbf{c}$.

Om $\mathbf{H}$ är positivt semidefinit så ges alltså varje minimalpunkt till f av ekvationssystemet $\mathbf{Hx} = -\mathbf{c}$. Detta ekvationssystem har (minst) en lösning om och endast om $-\mathbf{c} \in \mathcal{R}(\mathbf{H})$. Om däremot $-\mathbf{c} \notin \mathcal{R}(\mathbf{H})$ så saknar ekvationssystemet $\mathbf{Hx} = -\mathbf{c}$ lösning, och då finns det alltså ingen minimalpunkt till f. Följande sats visar att man kan säga mer än så.

Sats: Antag att $\mathbf{H}$ är positivt semidefinit och att $-\mathbf{c} \notin \mathcal{R}(\mathbf{H})$.
Då finns en vektor $\mathbf{d} \in I\!R^n$ sådan att om man sätter $\mathbf{x}(t) = t\,\mathbf{d}$, där $t \in I\!R$,
så gäller att $f(\mathbf{x}(t)) \to -\infty$ då $t \to +\infty$. (Dvs funktionen f är nedåt obegränsad).

Bevis: Eftersom $\mathbf{H}$ är symmetrisk så är de båda underrummen $\mathcal{N}(\mathbf{H})$ och $\mathcal{R}(\mathbf{H})$ varandras ortogonala komplement, så att vektorn $-\mathbf{c} \in I\!R^n$ på ett unikt sätt kan skrivas på formen $-\mathbf{c} = \mathbf{d} + \mathbf{p}$, där $\mathbf{d} \in \mathcal{N}(\mathbf{H})$ är ortogonala projektionen av $-\mathbf{c}$ på $\mathcal{N}(\mathbf{H})$ och $\mathbf{p} \in \mathcal{R}(\mathbf{H})$ är ortogonala projektionen av $-\mathbf{c}$ på $\mathcal{R}(\mathbf{H})$. Att $-\mathbf{c} \notin \mathcal{R}(\mathbf{H})$ medför att $\mathbf{d} \neq \mathbf{0}$, så att
$\mathbf{c}^{\mathsf{T}}\mathbf{d} = -(\mathbf{d}+\mathbf{p})^{\mathsf{T}}\mathbf{d} = -\mathbf{d}^{\mathsf{T}}\mathbf{d} - \mathbf{p}^{\mathsf{T}}\mathbf{d} = -\mathbf{d}^{\mathsf{T}}\mathbf{d} = -|\mathbf{d}|^2 < 0$. Observera också att $\mathbf{Hd} = \mathbf{0}$.
Sätt nu $\mathbf{x}(t) = t\,\mathbf{d}$, där $t \in I\!R$, och låt $t \to +\infty$. Då erhålls att
$f(\mathbf{x}(t)) = f(t\,\mathbf{d}) = \frac{1}{2}t^2\mathbf{d}^{\mathsf{T}}\mathbf{Hd} + t\,\mathbf{c}^{\mathsf{T}}\mathbf{d} + c_0 = -t\,|\mathbf{d}|^2 + c_0 \to -\infty$.

2.6 Minimering av en strikt konvex kvadratisk funktion utan bivillkor

Här behandlas nu det viktiga specialfallet att matrisen $\mathbf{H}$ är positivt definit, dvs att den kvadratiska funktionen f är strikt konvex.

Om $\mathbf{H}$ är positivt definit så gäller dels att $\mathbf{H}$ är positivt semidefinit (ty varje positivt definit matris är även positivt semidefinit), dels att ekvationssystemet $\mathbf{Hx} = -\mathbf{c}$ har *exakt en* lösning (ty varje positivt definit matris är icke-singulär).
Det betyder enligt ovan att den kvadratiska funktionen $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^{\mathsf{T}}\mathbf{Hx} + \mathbf{c}^{\mathsf{T}}\mathbf{x} + c_0$ har en unik minimalpunkt som kan bestämmas genom att lösa ekvationssystemet $\mathbf{Hx} = -\mathbf{c}$.
Den unika lösningen $\hat{\mathbf{x}}$ till detta ekvationssystem är också den unika minimalpunkten till f.

2.7 Sammanfattning av resultaten i detta kapitel

Låt $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^{\mathsf{T}}\mathbf{Hx} + \mathbf{c}^{\mathsf{T}}\mathbf{x} + c_0$, med $\mathbf{H}$ symmetrisk.
$\hat{\mathbf{x}} \in I\!R^n$ är en minimalpunkt till f *om och endast om* $\mathbf{H}$ är positivt semidefinit och $\mathbf{H}\hat{\mathbf{x}} = -\mathbf{c}$.
Speciellt om $\mathbf{H}$ är positivt definit så har ekvationssystemet $\mathbf{Hx} = -\mathbf{c}$ en unik lösning $\hat{\mathbf{x}}$ som också är den unika minimalpunkten till f.
Om $\mathbf{H}$ är positivt semidefinit, men ekvationssystemet $\mathbf{Hx} = -\mathbf{c}$ saknar lösning, så är f nedåt obegränsad och saknar minimalpunkt.
Om $\mathbf{H}$ ej är positivt semidefinit så är f nedåt obegränsad och saknar minimalpunkt.
På köpet har vi visat följande intressanta egenskap hos kvadratiska funktioner:
Det finns (minst) en minimalpunkt till f om och endast om f är nedåt begränsad.