KTH Matematik

Tentamen i 5B1762 Optimeringslära för T.
Lördag 20 maj 2006 kl. 8.00–13.00

Examinator: Krister Svanberg, tel. 790 71 37

Tillåtna hjälpmedel: Penna, suddgummi och linjal. **Ej räknare!** Ett formelblad delas ut.

Lösningsmetoder: Om ej annat anges i texten skall problemen lösas med systematiska metoder som ej blir orimliga vid stora problem. Slutsatser ska motiveras ordentligt. Om ej annat anges i texten får kända satser användas utan bevis.

Bonus: Den som har minst 5 poäng från hemuppgifterna ska hoppa över uppgift 1(a). Den som har minst 10 poäng från hemuppgifterna ska hoppa över hela uppgift 1.

För godkänt krävs 25 poäng. 23–24 poäng ger möjlighet att komplettera inom tre veckor efter att tentamensresultatet har anslagits.

Behandla endast en uppgift per blad. Numrera sidorna och skriv namn på varje blad.

---

1. (a) Ett företag tillverkar de tre produkterna A, B och C.
Tillverkningen består av momenten *stansning* och *pressning*.
Varje produkt måste genomgå *bägge* momenten.

Stansavdelningen, som kan utnyttjas 8 timmar per dag, har följande kapacitet:
2000 enheter per timme av produkt A, eller
1600 enheter per timme av produkt B, eller
1100 enheter per timme av produkt C.
Avdelningen kan utan problem ställa om från en produkt till en annan.

Pressavdelningen, som kan utnyttjas 8 timmar per dag, har följande kapacitet:
1000 enheter per timme av produkt A, eller
1500 enheter per timme av produkt B, eller
2400 enheter per timme av produkt C.
Avdelningen kan utan problem ställa om från en produkt till en annan.

Täckningsbidraget (intäkt minus rörlig kostnad) per tillverkad enhet av respektive produkt är: 12 kr för A, 9 kr för B och 8 kr för C.

Företaget vill nu bestämma hur många enheter av respektive produkt som ska tillverkas per dag för att det totala täckningsbidraget ska bli så stort som möjligt utan att man bryter mot avdelningarnas kapacitetsbegränsningar.

Din uppgift är att *formulera* företagets problem som ett LP-problem. Däremot behöver du inte beräkna optimal lösning till detta LP-problem. .... (5p)

(b) Betrakta ett balanserat Transportproblem med 4 leverantörer och 4 kunder:

$$\begin{aligned}
\text{minimera} \quad & \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} c_{ij}x_{ij} \\
\text{då} \quad & \sum_{j=1}^{4} x_{ij} = s_i\,, \quad \text{för } i = 1,\ldots,4 \\
& \sum_{i=1}^{4} x_{ij} = d_j\,, \quad \text{för } j = 1,\ldots,4 \\
& x_{ij} \geq 0\,, \quad \text{för alla } i \text{ och } j,
\end{aligned}$$

där s_i = tillgången hos leverantör nr i, d_j = efterfrågan hos kund nr j, och c_{ij} = transportkostnaden per enhet från leverantör nr i till kund nr j.
Antag att tillgång och efterfrågan ges av
$s_1 = 80$, $s_2 = 60$, $s_3 = 40$, $s_4 = 20$, $d_1 = 20$, $d_2 = 40$, $d_3 = 60$, $d_4 = 80$,
och att transportkostnaderna ges av tabellen:

c_{ij}	kund 1	kund 2	kund 3	kund 4
lev 1	16	25	36	49
lev 2	9	16	25	36
lev 3	4	9	16	25
lev 4	1	4	9	16

Med hjälp av "North West Corner"-metoden erhålls följande tillåtna baslösning:

x_{ij}	kund1	kund2	kund3	kund4	s_i
lev 1	20	40	20		80
lev 2			40	20	60
lev 3				40	40
lev 4				20	20
d_j	20	40	60	80	

Avgör om detta är en optimal lösning eller ej till problemet. .... (5p)

2. Betrakta följande LP-problem på standardform:

$$\begin{array}{rrrrrrrl}
\text{minimera} & 4x_1 & + 4x_2 & + 2x_3 & + 4x_4 & + 4x_5 & & \\
\text{då} & 4x_1 & + 3x_2 & + 2x_3 & + x_4 & & = & 5, \\
& & x_2 & + 2x_3 & + 3x_4 & + 4x_5 & = & 3, \\
& x_1 & & & & & \geq & 0, \\
& & x_2 & & & & \geq & 0, \\
& & & x_3 & & & \geq & 0, \\
& & & & x_4 & & \geq & 0, \\
& & & & & x_5 & \geq & 0.
\end{array}$$

(a) Använd Simplexmetoden för att bestämma en optimal lösning till problemet. Starta med x_1 och x_5 som basvariabler. .... (7p)

(b) Formulera det motsvarande duala problemet och ange en optimal lösning till detta. Åskådliggör även det duala problemet grafiskt i en figur med y_1 och y_2 på koordinataxlarna. .... (3p)

3. (a) Bestäm en optimal lösning till följande kvadratiska optimeringsproblem med linjära *likhetsbivillkor*. .... (4p)

$$\begin{aligned} \text{minimera} \quad & \tfrac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - x_1 - x_2 - x_3 \\ \text{då} \quad & x_1 + x_2 = 3, \\ & x_1 + x_3 = 1. \end{aligned}$$

(b) Använd den iterativa metod som ingår i kursen för att bestämma en optimal lösning till följande kvadratiska optimeringsproblem med linjära *olikhetsbivillkor*. Du måste starta från punkten $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 0$. .... (6p)

$$\begin{aligned} \text{minimera} \quad & \tfrac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - x_1 - x_2 - x_3 \\ \text{då} \quad & x_1 + x_2 \geq 3, \\ & x_1 + x_3 \geq 1. \end{aligned}$$

4. Betrakta följande ickelinjära minsta-kvadratproblemet i variabelvektorn $\mathbf{x} \in I\!R^2$:

$$\text{minimera} \quad f(\mathbf{x}) = \tfrac{1}{2}(h_1(\mathbf{x})^2 + h_2(\mathbf{x})^2 + h_3(\mathbf{x})^2 + h_4(\mathbf{x})^2),$$

där funktionerna h_i ges av

$$\begin{aligned} h_1(\mathbf{x}) &= (x_1 + 1)^2 + (x_2 + 1)^2 - 4, \\ h_2(\mathbf{x}) &= (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 - 1, \\ h_3(\mathbf{x}) &= (x_1 + 1)^2 + (x_2 - 1)^2 - 3, \\ h_4(\mathbf{x}) &= (x_1 - 1)^2 + (x_2 + 1)^2 - 2. \end{aligned}$$

(a) Genomför en iteration med Gauss-Newtons metod utgående från $\mathbf{x}^{(1)} = (0\,,\,0)^\mathsf{T}$. Kontrollera att din erhållna punkt $\mathbf{x}^{(2)}$ uppfyller $f(\mathbf{x}^{(2)}) < f(\mathbf{x}^{(1)})$. ...... (6p)

(b) Ett alternativ till Gauss-Newton är Newtons metod för att minimera $f(\mathbf{x})$. Genomför en iteration med Newtons metod utgående från $\mathbf{x}^{(1)} = (0\,,\,0)^\mathsf{T}$. Kontrollera att din erhållna punkt $\mathbf{x}^{(2)}$ uppfyller $f(\mathbf{x}^{(2)}) < f(\mathbf{x}^{(1)})$. ...... (4p)

5. I denna uppgift är $\mathbf{p} \in I\!R^n$ och $\mathbf{q} \in I\!R^n$ två givna vektorer som uppfyller att $|\,\mathbf{p}\,|^2 = 1$ (dvs $\mathbf{p}^\mathsf{T}\mathbf{p} = 1$), $|\,\mathbf{q}\,|^2 = 1$ (dvs $\mathbf{q}^\mathsf{T}\mathbf{q} = 1$) samt $\mathbf{p}^\mathsf{T}\mathbf{q} = 0$.

Betrakta nu följande problem i variabelvektorn $\mathbf{x} \in I\!R^n$:

$$\begin{aligned} \text{minimera} \quad & |\,\mathbf{x} - \mathbf{p}\,|^2 \\ \text{då} \quad & |\,\mathbf{x} - \mathbf{q}\,|^2 \leq 1. \end{aligned}$$

(a) Ställ upp KKT-villkoren för detta problem. .... (2p)

(b) Använd dessa KKT-villkor för att bestämma en optimal lösning $\hat{\mathbf{x}}$ till problemet. (Svaret kommer att innehålla $\mathbf{p}$ och $\mathbf{q}$.) .... (6p)

(c) Är den lösning $\hat{\mathbf{x}}$ du bestämt i (b)-uppgiften en *globalt* optimal lösning? Motivera ordentligt. .... (2p)

Lycka till!