KTH Matematik

Tentamen i 5B1762 Optimeringslära för T.
Tisdag 29 augusti 2006 kl. 8.00–13.00

Examinator: Krister Svanberg, tel. 790 71 37

Tillåtna hjälpmedel: Penna, suddgummi och linjal. **Ej räknare!** Ett formelblad delas ut.

Lösningsmetoder: Om ej annat anges i texten skall problemen lösas med systematiska metoder som ej blir orimliga vid stora problem. Slutsatser ska motiveras ordentligt. Om ej annat anges i texten får kända satser användas utan bevis.

Bonus: Den som har minst 5 poäng från hemuppgifterna ska hoppa över uppgift 1(a). Den som har minst 10 poäng från hemuppgifterna ska hoppa över hela uppgift 1.

För godkänt krävs 25 poäng. 23–24 poäng ger möjlighet att komplettera inom tre veckor efter att tentamensresultatet har anslagits.

Behandla endast en uppgift per blad. Numrera sidorna och skriv namn på varje blad.

---

1. (a) Foderman AB tillverkar produkterna MUU och GNÄGG ur råvarorna havre, råg och potatis. Näringsinnehållet i respektive råvara, mätt i enheter per kg, framgår av följande tabell, där N1 = Näringsämne 1 (t ex protein), etc.

	N1	N2	N3
HAVRE	32	10	7
RÅG	24	7	8
POTATIS	49	5	12

Enligt varudeklarationen skall respektive produkt innehålla minst följande kvantiteter näringsämnen, mätt i enheter per kg:

	N1	N2	N3
MUU	38	6	7
GNÄGG	33	7	9

Produktionen planeras veckovis, och inför en viss vecka har Foderman av sin leverantör erbjudits att köpa råvaror till följande priser och maximala kvantiteter:

	kr/kg	max antal kg
HAVRE	2.00	1000
RÅG	1.50	1000
POTATIS	2.50	2000

Foderman har inneliggande beställningar på 2000 kg MUU och 1000 kg GNÄGG för den aktuella veckan, och man önskar tillverka dessa kvantiteter med råvaror som man kan köpa från sin leverantör enligt ovan.

Hur ska recepten se ut för de båda produkterna under den kommande veckan, och hur mycket av de olika råvarorna ska köpas in? Foderman vill förstås minimera sina inköpskostnader.

Formulera Fodermans problem som ett LP-problem. .... (5p)

(Du behöver *inte* bestämma en optimal lösning till LP-problemet.)

(b) Betrakta följande LP-problem som vi kallar P.

$$\begin{aligned} \mathrm{P}: \quad \text{minimera} \quad & \mathbf{c}^{\mathsf{T}}\mathbf{x} \\ \text{då} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \end{aligned}$$

$$\text{där } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 40 \\ 35 \\ -30 \\ -25 \\ -20 \end{pmatrix} \text{ och } \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Av det speciella utseendet på matrisen $\mathbf{A}$ följer att problemet P i själva verket är ett minkostnadsflödesproblem. Rita motsvarande nätverk och verifiera därefter att $\hat{\mathbf{x}} = (40, 0, 50, 25, 0, 20, 0)^{\mathsf{T}}$ är en optimal lösning till P. .... (5p)

2. Betrakta följande LP-problem: (Observera att det är ett maximeringsproblem.)

$$\begin{array}{rrcrcrcrcl} \text{maximera} & 3x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & & \\ \text{då} & x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & \leq & 18, \\ & 2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & \leq & 12, \\ & x_1 & & & & & & & \geq & 0, \\ & & & x_2 & & & & & \geq & 0, \\ & & & & & x_3 & & & \geq & 0, \\ & & & & & & & x_4 & \geq & 0. \end{array}$$

(a) Använd Simplexmetoden för att bestämma en optimal lösning till problemet. Starta med slackvariablerna som basvariabler. .... (7p)

(b) Din optimala lösning är inte unik, eller hur? Bestäm ytterligare en optimal lösning till problemet. .... (3p)

3. Låt i denna uppgift $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ -9 \end{pmatrix}$.

(a) Visa att ekvationssystemet $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ inte har någon lösning. .... (2p)

(b) Bestäm en vektor $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3$ som minimerar $|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}|^2$. .... (4p)

(c) Som du nog redan noterat finns det oändligt många optimala lösningar till minimeringsproblemet i (b)-uppgiften. Låt $\mathcal{S}$ beteckna mängden av dessa optimala lösningar, dvs mängden av de $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ som minimerar $|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}|^2$. Bestäm den unika vektor $\hat{\mathbf{x}} \in \mathcal{S}$ som är kortast (dvs har minst norm) bland alla $\mathbf{x} \in \mathcal{S}$. .... (4p)

4. Man vill minimera följande ickelinjära funktion utan några bivillkor:

$$f(x_1, x_2) = 8x_1^2x_2^2 + 2x_1^2 + 3x_2^2 - 4x_1 - 6x_2.$$

(a) Utför en fullständig iteration med Newtons metod, utgående från startpunkten $\mathbf{x}^{(1)} = (0,\, 0)^\mathsf{T}$. .... (6p)

(b) Avgör om f är en konvex funktion på hela planet $I\!R^2$. .... (2p)

(c) Visa att $f(\mathbf{x}) > -5$ för alla $\mathbf{x} \in I\!R^2$. .... (2p)

5. Låt $\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ och betrakta följande problem i variabelvektorn $\mathbf{x} \in I\!R^4$:

$$\begin{aligned} \text{minimera} \quad & \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{H}\mathbf{x} \\ \text{då} \quad & \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{x} \le 4, \\ & \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{x} \ge 1. \end{aligned}$$

(a) Formulera KKT-villkoren för detta problem. .... (2p)

(b) Bestäm samtliga lösningar till dessa KKT-villkor. .... (6p)

(c) Ange en globalt optimal lösning till problemet. Motivera. .... (2p)

Lycka till!