KTH Matematik

Tentamen i 5B1762 Optimeringslära för T.
Tisdag 28 augusti 2007 kl. 14.00–19.00

Examinator: Krister Svanberg, tel. 790 71 37

Tillåtna hjälpmedel: Penna, suddgummi och linjal. **Ej räknare!** Ett formelblad delas ut.

Lösningsmetoder: Om ej annat anges i texten skall problemen lösas med systematiska metoder som ej blir orimliga vid stora problem. Slutsatser ska motiveras ordentligt. Om ej annat anges i texten får kända satser användas utan bevis.

Bonus: Den som har minst 5 poäng från hemuppgifterna ska hoppa över uppgift 1(a). Den som har minst 9 poäng från hemuppgifterna ska hoppa över hela uppgift 1.

För godkänt krävs 25 poäng. 23–24 poäng ger möjlighet att komplettera inom tre veckor efter att tentamensresultatet har anslagits.

Behandla endast en uppgift per blad. Numrera sidorna och skriv namn på varje blad.

---

1. (a) I denna uppgift är $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 7 \end{bmatrix}$.

Bestäm en bas till vart och ett av de fyra fundamentala underrummen till $\mathbf{A}$, dvs till $\mathcal{R}(\mathbf{A})$, $\mathcal{R}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$, $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ och $\mathcal{N}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$. . . . . (5p)

(b) Mustmans familjeföretag producerar och säljer fyra olika mustsorter: Äppelmust, Päronmust, Blandmust och Cidermust.
Varje hektoliter must kräver p arbetstimmar för tillverkning och q arbetstimmar för förpackning. Mustmans ekonomiska vinst på musten är v kronor/hektoliter.
p, q och v har olika värden för de olika mustsorterna enligt följande tabell:

	p	q	v
Äppelmust	1.6	1.2	196
Päronmust	1.8	1.2	210
Blandmust	3.2	1.2	280
Cidermust	5.4	1.8	442

En normal vecka har företaget 80 timmar (två familjemedlemmar) att tillgå för tillverkning och 40 timmar (en familjemedlem) för förpackning.

Vidare har man bestämt att äppelmusten ska svara för *minst* 20% av den producerade volymen must och att päronmusten ska svara för *högst* 30% av den producerade volymen must.

Frågan är hur mycket av respektive mustsort som ska tillverkas per vecka för att Mustmans vinst ska maximeras under ovan angivna villkor. Musten är populär och man kan utan svårighet sälja det man producerar.

Din uppgift är nu att *formulera* Mustmans problem som ett LP-problem.
Du behöver däremot *inte* beräkna optimal lösning. . . . . (5p)

2. (a) Lös följande LP-problem med simplexmetoden. Du måste starta i den tillåtna baslösningen $\mathbf{x} = (3, 0, 0, 0)^\mathsf{T}$.

$$\begin{array}{rrcrcrcrcl} \text{minimera} & 3x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & + & 6x_4 & & \\ \text{då} & 6x_1 & + & 3x_2 & + & 9x_3 & + & 7x_4 & = & 18, \\ & x_1 & & & & & & & \geq & 0, \\ & & & x_2 & & & & & \geq & 0, \\ & & & & & x_3 & & & \geq & 0, \\ & & & & & & & x_4 & \geq & 0. \end{array}$$

Ange den optimala lösningen och motsvarande optimalvärde.
Förklara ordentligt vad du gör. .... (4p)

(b) Formulera det duala LP-problemet svarande mot LP-problemet i (a)-uppgiften ovan. Ange en optimal lösning till detta duala problem. .... (2p)

(c) Denna (c)-uppgift är helt oberoende av (a)- och (b)-uppgifterna ovan.
Följande båda LP-problem (som har sitt ursprung i ett visst två-personers nollsummespel) är varandras duala problem. Det behöver du inte visa.

$$\begin{array}{rl} \text{minimera} & x_3 \\ \text{då} & -x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 0 \\ & 3x_1 - 4x_2 + x_3 \geq 0 \\ & x_1 + x_2 = 1 \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \text{ ej teckenbegränsad.} \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \text{maximera} & y_3 \\ \text{då} & -y_1 + 3y_2 + y_3 \leq 0 \\ & 2y_1 - 4y_2 + y_3 \leq 0 \\ & y_1 + y_2 = 1 \\ & y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,\ y_3 \text{ ej teckenbegränsad.} \end{array}$$

Man har löst det primala problemet ovan och erhållit den optimala lösningen $\hat{x}_1 = 0.6$, $\hat{x}_2 = 0.4$, $\hat{x}_3 = -0.2$. Använd denna information för att (på valfritt sätt) bestämma en optimal lösning $\hat{\mathbf{y}}$ till det duala problemet. .... (4p)

3. I denna uppgift är trevariabelfunktionen f given av

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{3}(x_j^4 - x_j^3 + x_j^2 - x_j), \text{ där } \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^\mathsf{T} \in I\!R^3.$$

(a) Avgör om f är en konvex funktion på hela $I\!R^3$. .... (2p)

(b) Antag att man vill minimera $f(\mathbf{x})$ utan några bivillkor.
Din uppgift är att utföra *en* fullständig iteration med Newtons metod utgående från startpunkten $\mathbf{x}^{(1)} = (1, 1, 1)^\mathsf{T}$.
Kontrollera att din erhållna punkt $\mathbf{x}^{(2)}$ uppfyller $f(\mathbf{x}^{(2)}) < f(\mathbf{x}^{(1)})$. ...... (6p)

(c) Ange en konstant C sådan att $f(\mathbf{x}) > C$ för alla $\mathbf{x} \in I\!R^3$.
Motivera svaret ordentligt. .... (2p)

4. Vi påminner först om att det euklidiska avståndet mellan två punkter $\mathbf{p}$ och $\mathbf{q}$ i $\mathbb{R}^n$ ges av $|\mathbf{p}-\mathbf{q}| = \sqrt{(\mathbf{p}-\mathbf{q})^\mathsf{T}(\mathbf{p}-\mathbf{q})}$, så att $|\mathbf{p}-\mathbf{q}|^2 = (\mathbf{p}-\mathbf{q})^\mathsf{T}(\mathbf{p}-\mathbf{q})$.

(a) Ett *hyperplan* H i $\mathbb{R}^n$ kan skrivas på formen $\mathrm{H} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{x} = b\}$, där $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ är en given vektor $\neq \mathbf{0}$ och $b \in \mathbb{R}$ är en given konstant.
Bestäm den punkt $\hat{\mathbf{x}} \in \mathrm{H}$ som ligger närmast origo (mätt i det vanliga euklidiska avståndet). Ditt svar får innehålla $\mathbf{a}$ och b. .... (4p)

(b) En *linje* L i $\mathbb{R}^n$ kan skrivas på formen $\mathrm{L} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} = \mathbf{c} + t\cdot\mathbf{d},\ \text{för } t \in \mathbb{R}\}$, där $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ och $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$ är givna vektorer med $\mathbf{d} \neq \mathbf{0}$.
(Olika värden på t svarar mot olika punkter på linjen.)
Bestäm den punkt $\bar{\mathbf{x}} \in \mathrm{L}$ som ligger närmast origo (mätt i det vanliga euklidiska avståndet). Ditt svar får innehålla $\mathbf{c}$ och $\mathbf{d}$. .... (2p)

(c) Låt H vara ett hyperplan och L en linje enligt ovan, och antag att $\mathbf{d} = \mathbf{a}$.
Bestäm den unika skärningspunkten $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ mellan H och L (dvs den punkt som uppfyller både $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathrm{H}$ och $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathrm{L}$). .... (2p)

(d) Visa att följande samband gäller: $|\tilde{\mathbf{x}}|^2 = |\hat{\mathbf{x}}|^2 + |\bar{\mathbf{x}}|^2$, med $\tilde{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{x}}$ och $\bar{\mathbf{x}}$ enligt ovan.
Försök ge en geometrisk motivering av detta samband för fallet $n = 2$.
Observera att vi antagit att $\mathbf{d} = \mathbf{a}$. .... (2p)

5. Betrakta följande ickelinjära optimeringsproblem

$$
\begin{aligned}
\text{minimera} \quad & 8x_1 - 6x_2 \\
\text{då} \quad & (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 \leq 4, \\
& (x_1 + 1)^2 + (x_2 + 1)^2 \leq 4.
\end{aligned}
$$

(a) Avgör om det är ett konvext optimeringsproblem eller ej. Motivera svaret. (1p)

(b) Ställ upp KKT-villkoren för problemet. .... (1p)

(c) Finns det någon *optimal* lösning $\hat{\mathbf{x}}$ till problemet ovan sådan att exakt ett av de bägge bivillkoren är uppfyllt med likhet i $\hat{\mathbf{x}}$ medan det andra är uppfyllt med strikt olikhet i $\hat{\mathbf{x}}$? Bestäm i såfall $\hat{\mathbf{x}}$. .... (4p)

(d) Finns det någon *optimal* lösning $\hat{\mathbf{x}}$ till problemet ovan sådan att bägge bivillkoren är uppfyllda med likhet i $\hat{\mathbf{x}}$? Bestäm i såfall $\hat{\mathbf{x}}$. .... (4p)

Lycka till!