KTH Matematik

**Tentamen i SF1861 och 5B1762 Optimeringslära för T.**
**Tisdag 26 augusti 2008 kl. 14.00–19.00**

*Examinator:* Krister Svanberg, tel. 790 71 37

*Tillåtna hjälpmedel:* Penna, suddgummi och linjal. **Ej räknare!** Ett formelblad delas ut.

*Lösningsmetoder:* Om ej annat anges i texten skall problemen lösas med systematiska metoder som ej blir orimliga vid stora problem. Slutsatser ska motiveras ordentligt. Om ej annat anges i texten får kända satser användas utan bevis.

*Bonus:* Den som har minst 5 poäng från hemuppgifterna ska hoppa över uppgift 1(a). Den som har minst 9 poäng från hemuppgifterna ska hoppa över hela uppgift 1.

För godkänt krävs 25 poäng. 23–24 poäng ger möjlighet att komplettera inom tre veckor efter att tentamensresultatet har anslagits. Kontakta examinator.

Behandla endast en uppgift per blad. Numrera sidorna och skriv namn på varje blad.

---

**1.** (a) Ett givet riktat nätverk har nodmängden $\mathcal{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ och bågmängden $\mathcal{B} = \{(1, 3),\ (1, 4),\ (2, 3),\ (2, 4),\ (3, 5),\ (3, 6),\ (4, 5),\ (4, 6)\}$ (riktade bågar). Nätverket har två stycken källnoder, nod 1 med tillgången 25 enheter och nod 2 med tillgången 10 enheter, samt två stycken sänknoder, nod 5 med efterfrågan 15 enheter och nod 6 med efterfrågan 20 enheter. Noderna 3 och 4 är mellannoder, utan tillgång eller efterfrågan. Flödeskostnaden $c_{ij}$, i sorten kkr per enhet flöde, för respektive båge $(i, j)$ i nätverket är enligt följande:
$c_{13} = 2,\ c_{14} = 4,\ c_{23} = 3,\ c_{24} = 5,\ c_{35} = 9,\ c_{36} = 8,\ c_{45} = 7,\ c_{46} = 6.$

Man vill bestämma ett flöde av minimal kostnad som uppfyller kraven på tillgång och efterfrågan enligt ovan.

Du ska formulera detta problem som ett LP-problem på standardform, dvs
$$\text{minimera } \mathbf{c}^{\mathsf{T}}\mathbf{x} \text{ då } \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ och } \mathbf{x} \geq \mathbf{0}.$$
Ange i detalj vad $\mathbf{A}$, $\mathbf{b}$ och $\mathbf{c}$ är i detta fall, samt vad komponenterna i variabelvektorn $\mathbf{x}$ står för.

Du ska därefter formulera motsvarande duala LP-problem på komponentform, vilket betyder att du ska skriva ner målfunktionen och de enskilda bivillkoren explicit.

Du behöver inte bestämma någon optimal lösning till ovanstående problem, varken till det primala eller det duala. .................................. (5p)

(b) I denna uppgift är $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$.

Bestäm en bas till vart och ett av de fyra fundamentala underrummen till $\mathbf{A}$, dvs till $\mathcal{R}(\mathbf{A})$, $\mathcal{R}(\mathbf{A}^{\mathsf{T}})$, $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ och $\mathcal{N}(\mathbf{A}^{\mathsf{T}})$. ................................ (4p)

**2.** (a) Följande LP-problem kallar vi för P1:

$$\begin{aligned} \text{minimera} \quad & 5x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \\ \text{då} \quad & 7x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 10, \\ & 2x_1 + \phantom{3}x_2 + x_3 - x_4 = 3, \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1,2,3,4. \end{aligned}$$

Visa att $(x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4) = (1,\, 1,\, 0,\, 0)$ är en optimal lösning P1. .........(5p)

(b) Antag nu att vi ändrar likhetsbivillkoren i P1 till olikhetsbivillkor, det första av typen "$\geq$" och det andra av typen "$\leq$", så att följande LP-problem erhålls:

$$\begin{aligned} \text{minimera} \quad & 5x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \\ \text{då} \quad & 7x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 \geq 10, \\ & 2x_1 + \phantom{3}x_2 + x_3 - x_4 \leq 3, \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1,2,3,4. \end{aligned}$$

Bestäm en optimal lösning till detta nya LP-problem. ....................(4p)
(Det är tillåtet att utgå från resultatet i (a)-uppgiften ovan.)

**3.** Betrakta den kvadratiska funktionen

$$q(\mathbf{x}) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2 - 4x_2x_3 + 3x_3^2 - 2x_3x_4 + 3x_4^2.$$

(a) Avgör om det finns någon minpunkt $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^4$ till $q(\mathbf{x})$. Bestäm i såfall $\hat{\mathbf{x}}$. (5p)

(b) Avgör om någon av punkterna $(0.7,\, 0.6,\, 0.5,\, 0.2)^\mathsf{T}$ eller $(0.8,\, 0.5,\, 0.4,\, 0.3)^\mathsf{T}$ är en optimal lösning till problemet att minimera $q(\mathbf{x})$ under bivillkoret att $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2$. ................................................(4p)

**4.** Man vill här minimera följande tvåvariabelfunktion $f$ utan några bivillkor:

$$f(\mathbf{x}) = e^{x_1} + e^{x_2} + x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 - 3x_1 - 3x_2.$$

(a) Utför en fullständig iteration med Newtons metod, utgående från startpunkten $\mathbf{x}^{(1)} = (0,0)^\mathsf{T}$. (Ledning: $e \approx 2.7$.) ......................................(5p)

(b) Avgör om $f$ är en konvex funktion på hela $\mathbb{R}^2$. ..........................(2p)

**5.** Betrakta följande (lite speciella) minsta-kvadratproblem med begränsade variabler:

$$\begin{aligned} \text{minimera} \quad & \tfrac{1}{2}\,|\,\mathbf{x} - \mathbf{c}\,|^2 = \tfrac{1}{2}\,(\mathbf{x} - \mathbf{c})^\mathsf{T}(\mathbf{x} - \mathbf{c}) \\ \text{då} \quad & -1 \leq x_j \leq 1, \quad j = 1,2,3,4, \end{aligned}$$

där $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^\mathsf{T}$ är variabelvektorn och $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3, c_4)^\mathsf{T}$ är en given vektor.

(a) Formulera i detalj KKT-villkoren (Karush-Kuhn-Tuckers optimalitetsvillkor) för detta problem. Observera att det är 8 st olikhetsbivillkor i problemet. (2p)

(b) Antag att $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^4$, tillsammans med en vektor med lagrangemultiplikatorer, uppfyller KKT-villkoren för problemet ovan. Medför detta att $\hat{\mathbf{x}}$ är en global optimallösning? Motivera ditt svar ordentligt! .......................... (2p)

(c) Antag speciellt att $\mathbf{c} = (-1.4,\ -0.4,\ 0.6,\ 1.6)^\mathsf{T}$.
Använd KKT-villkoren för att bestämma en optimal lösning till problemet. Ange även de 8 lagrangemultiplikatorernas värden. ......................(4p)

**6.** En tvestjärt befinner sig i hörnet med koordinaterna $(0, 0, 0)$ i ett rum vars övriga hörn har koordinaterna $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$, $(0, 0, c)$, $(a, b, 0)$, $(a, 0, c)$, $(0, b, c)$ och $(a, b, c)$, där vi antar att $a > b > c > 0$.

Tvestjärten, som inte kan flyga men kan krypa utmed golv, väggar och tak, har för avsikt att krypa till hörnet med koordinaterna $(a, b, c)$.

Hjälp tvestjärten att bestämma den kortaste krypvägen!

Ange speciellt det kortaste krypavståndet uttryckt i $a$, $b$ och $c$, samt ange hur detta uttryck (och kortaste krypvägen) ändras om i stället $c > a > b > 0$. .......... (8p)

Lycka till!