Några övningsexempel i Optimeringslära

Avdelningen för Optimeringslära and systemteori, KTH, Feb 2013

Innehåll

Övningsexempel

1. Linjär optimering

1.1 Det är måndag morgon och Korvman AB har äntligen fått en rejäl beställning. Man ska nämligen under de närmast följande 6 söndagarna leverera respektive K_1, K_2, K_3, K_4, K_5 och K_6 kg korv till Gröna Lund. Korvman kan under varje vecka tillverka högst A kg korv till kostnaden C kr/kg. Om man sätter in övertidsarbete kan man under veckan tillverka ytterligare högst B kg korv, men då till den högre kostnaden D kr/kg. (D är större än C.) Tillverkad korv kan frysas och lagras till kostnaden L kr per kg och lagringsvecka. (K_1, K_2, K_3, K_4, K_5, K_6, A, B, C, D och L är givna tal.)

Korvman vill bestämma en optimal produktions- och lagringsplan för de kommande 6 veckorna. Man kan anta att inga andra kunder kommer och stör bilden.

Hjälp Korvman AB att formulera ovanstående som ett LP-problem

1.2 Foderman AB tillverkar produkterna MUU och GNÄGG ur råvarorna havre, råg och potatis. Näringsinnehållet i respektive råvara, mätt i enheter per kg, framgår av följande tabell, där NÄ1 = Näringsämne 1 (t ex protein), etc.

	NÄ1	NÄ2	NÄ3
HAVRE	32	7	10
RÅG	24	8	7
POTATIS	49	12	5

Enligt varudeklarationen skall respektive produkt innehålla minst följande kvantiteter näringsämnen, mätt i enheter per kg:

	NÄ1	NÄ2	NÄ3
MUU	38	7	6
GNÄGG	33	9	7

Produktionen planeras veckovis, och inför en viss vecka har Foderman av sin huvudleverantör erbjudits att inköpa råvaror till följande priser och maximala kvantiteter:

	kr/kg	max antal kg
HAVRE	1.25	1000
RÅG	1.00	1000
POTATIS	1.50	2000

Foderman har inneliggande beställningar på 2000 kg MUU och 1000 kg GNÄGG för den aktuella veckan, och man önskar tillverka dessa kvantiteter med råvaror som man kan köpa från sin huvudleverantör enligt ovan.

Hur ska recepten se ut för de båda produkterna under den kommande veckan, och hur mycket av de olika råvarorna ska köpas in? Man vill förstås minimera sina inköpskostnader.

Formulera Fodermans problem som ett LP-problem.

1.3 Mustmans familjeföretag producerar och säljer 4 olika mustsorter: Äppelmust, Päronmust, Blandmust och Cidermust. Varje låda must (innehållande 25 st enlitersflaskor) kostar Mustmans c kr att tillverka, kräver p timmar för framställning och q timmar för flaskpåfyllning och förpackning. Därefter kan Mustmans sälja lådan för k kronor. Observera att c, p, q och k har olika värden för de olika mustsorterna, enligt följande tabell:

Mustsort	c	p	q	k
Äpple	55	2.0	1.4	200
Päron	70	2.6	1.4	225
Bland	50	2.5	1.4	200
Cider	95	4.0	1.8	275

En normal vecka har man 80 timmar att tillgå för framställning och 40 timmar för flaskpåfyllning och förpackning. Man är mån om ett jämnt och brett sortiment och har därför bestämt att ingen av de fyra mustsorterna ska svara för mer än 40% eller mindre än 10% av den totala mustproduktionen. Mustmans must är populär och man har normalt inga svårigheter att sälja det man producerar, till ovan angivna priser.

Frågan är nu hur mycket av respektive mustsort som ska tillverkas per vecka (i genomsnitt), för att Mustmans vinst ska maximeras under de ovan angivna villkoren.

Formulera detta som ett LP-problem.

1.4 En teknolog vill minimera sina kostnader för föda, under vissa bivillkor på intaget av proteiner och kolhydrater.Det finns totalt 6 olika födoslag som teknologen kan tänka sig att äta:

1. Hamburgare (Sammys, utan bröd)
2. Varmkorv (Sibyllas, utan bröd)
3. Pommes Frittes (Felix)
4. Vita bönor i tomatsås (Heinz)
5. Jordnötter (Estrellas, saltade)
6. Lakritsbåtar (Cloettas)

Den självklara drycken är vatten, som är gratis. Födoslag nr j ($j = 1, \dots, 6$) kostar c_j kr/kg och innehåller p_j proteinenheter/kg och k_j kolhydratenh./kg.

För att kunna upprätthålla sin anmärkningsvärda studiekapacitet behöver teknologen varje dag minst P_{min} proteinenheter och minst K_{min} kolhydratenheter. Å andra sidan vill hon, av andra skäl, inte få i sig mer än K_{max} kolhydratenheter per dag.

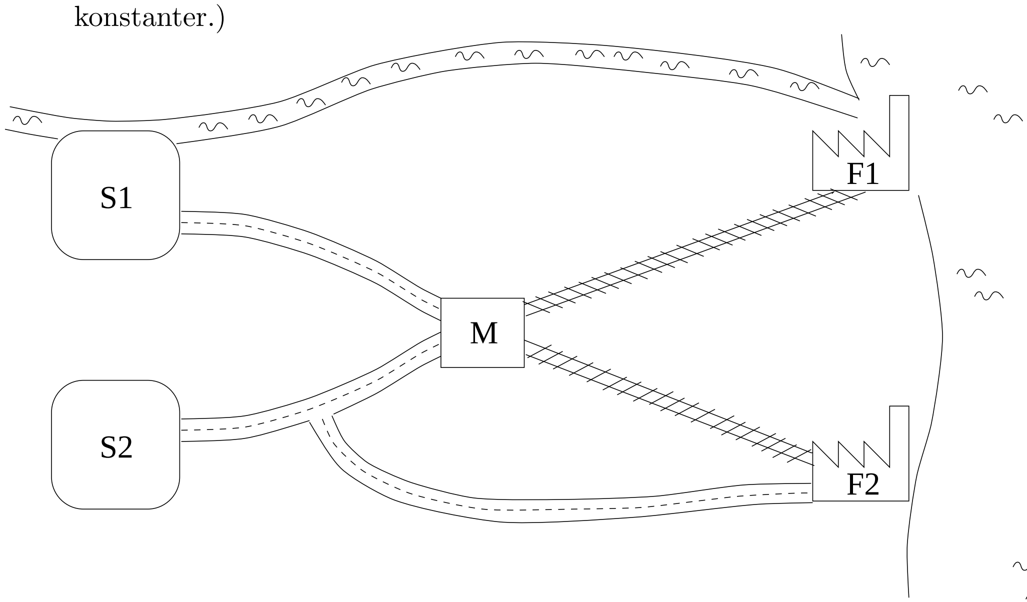
(a) Formulera teknologens dietproblem som ett LP-problem. Ange noggrant vad dina variabler står för och vad de har för sort.

(b) Hur många av de ovan nämnda 6 födoslagen kommer att ingå i teknologens optimala diet? Motivera utförligt.

1.5 Företaget SKOGAB har massafabriker vid kusten och skogslotter inne i landet. Fabrikerna F1 och F2 behöver respektive 5000 och 3000 kubikmeter virke under en given period. Virket kan bara tas från skogslotterna S1 och S2, där det finns respektive 3500 och 4500 kubikmeter att tillgå. Problemet är hur man ska transportera virket till fabrikerna på billigast möjliga sätt. SKOGAB har följande transportalternativ, som även är markerade i figuren nedan. (Notera att i orten M sker omlastning från lastbil till tåg. Kostnaden för denna omlastning antas vara inbakad i de nedan givna kostnaderna för järnvägstransport. Detsamma gäller för övriga omlastningar.)

- flottning från S1 till F1, till kostnaden C_{11} kr/m^3,
- järnväg från orten M till F1, till kostnaden C_{M1} kr/m,
- järnväg från orten M till F2, till kostnaden C_{M2} kr/m,
- havsbogsering från F1 till F2 eller från F2 till F1, till kostnaden C_{12} resp C_{21} kr/m,
- lastbilstransporter, som omfattar övriga utritade alternativ, till kostnaden C_{1M} kr/m från S1 till M, C_{2M} kr/m från S2 till M resp C_{22} kr/m från S2 till F2.

Formulera, som ett LP-problem, SKOGAB:s problem att till lägsta kostnad transportera virket från skogslotterna till massafabrikerna. Ange noggrant vad Dina variabler och bivillkor står för. ($C_{11}, C_{M1}, \ldots, C_{22}$ ovan är givna positiva konstanter.)



1.6 Ett företag använder råvarorna $R_1, \ldots, R_m$ för att blanda till produkterna $P_1, \ldots, P_n$. För varje kg av produkt P_j åtgår a_{ij} kg av råvara R_i. (a_{ij}:na är givna icke-negativa tal.) Företaget kan köpa in R_i till priset d_i kr/kg medan man kan sälja P_j till priset c_j kr/kg. (d_i:na och c_j:na är givna tal.)
Marknadsbegränsningar gör att man inte vill blanda till mer än högst u_j kg per vecka av P_j. (u_j:na är givna tal.) Den enda produktionsbegränsningen är arbetstiden, 40 timmar per vecka, för företagets ende Blandmästare. Det tar t_j timmar/kg att blanda till produkten P_j. (t_j:na är givna tal.)
Frågan är hur många kg av respektive produkt som skall blandas till per vecka för att företagets vinst skall maximeras. Formulera detta som ett LP-problem!

1.7 Betrakta LP-problemet:

$$(P)\quad \begin{array}{lrcl} \min & 6x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 11x_4 + x_5 & & \\ \text{då} & x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 & = & 4 \\ & 2x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 & = & 3 \\ & x_j & \geq & 0, \quad j = 1, \ldots, 5 \end{array}$$

(a) Visa att följande lösning är optimal till (P):

$$x_2 = 1,\ x_3 = 2,\ \text{övriga } x_j = 0.$$

(b) Ställ upp det duala problemet (D) till (P).

Åskådliggör (D) i en figur och bestäm optimal lösning till (D) grafiskt ur denna figur.

Kontrollera därefter, med hjälp av räkningarna i (a)-uppgiften ovan, att Du verkligen hittat rätt duallösning.

(c) Antag att högerledsvektorn i (P) ändras från $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ till $\begin{pmatrix} 4-\delta \\ 3+\delta \end{pmatrix}$ där δ är ett reellt tal.

Mellan vilka gränser på δ är det fortfarande optimalt med x_2 och x_3 som basvariabler?

Ange hur optimalvärdet beror av δ inom dessa gränser.

(d) Utred, m h a figuren i (b)-uppgiften ovan, hur den duala optimallösningen $\mathbf{y}$ beror av δ, för alla värden på δ sådana att $-3 \leq \delta \leq 4$.

Ange också, baserat på detta, hur optimalvärdet till (P) beror av δ då $-3 \leq \delta \leq 4$, och jämför med (c) ovan.

1.8 Betrakta LP-problemet:

$$(P)\quad \begin{array}{lrcl} \min & 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 & & \\ \text{då} & x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 & \geq & 12 \\ & 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 & \geq & 9 \\ & x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 & \geq & 9 \\ & 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & \geq & 7 \\ & x_j & \geq & 0, \quad j = 1, \ldots, 4 \end{array}$$

(a) En trovärdig person påstår att optimal duallösning till detta problem är: $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}$.

Använd denna information för att bestämma optimal primallösning $\boldsymbol{x}$.

Verifiera därefter att den trovärdiga personen verkligen hade rätt.

(b) Antag att högerledet i första bivillkoret ändras från 12 till $12 + \delta$. Mellan vilka gränser på δ är den aktuella basen fortfarande optimal? Ange också hur den optimala lösningen $\boldsymbol{x}$ beror av δ inom dessa gränser.

1.9 Betrakta följande LP-problem:

$$
(P) \quad
\begin{array}{ll}
\min & \boldsymbol{c}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{x} \\
\text{då} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\
 & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}.
\end{array}
\qquad
\boldsymbol{c}^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 8 & 6 \end{pmatrix}, \quad
\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad
\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix},
$$

(a) Visa att $\boldsymbol{x}^* = \begin{pmatrix} 0 & 2.8 & 1.4 & 0 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}$ är unik optimallösning till (P).

(b) Antag att högerledet ändras till $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 7+\delta \\ 7+\delta \end{pmatrix}$.

Hur påverkas optimallösningen och optimalvärdet av δ? Ange också för vilka värden på δ som ditt svar är giltigt.

(c) Antag att kostnadsvektorn ändras till $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 7+\delta & 4+\delta & 8+\delta & 6+\delta \end{pmatrix}$, medan högerledet $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix}$ är fixt.

För vilka värden på δ är lösningen i (a)-uppgiften ovan fortfarande optimal?

(Räknehjälp: Om $ad - bc \neq 0$ så är $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.)

1.10 Consider the following approximation problem.

Given is a set $T \in I\!R^k$, and the continuous functions f and f_j, $j = 1, \dots, n$ on T. The aim is to approximate f by a linear combination of the functions f_j, $j = 1, \dots, n$.

This leads to the following optimization problem.

$$
(P) \quad \min_{x_j, j=1,\dots,n} \; \max_{t \in T} |f(t) - \sum_{j=1}^{n} x_j f_j(t)|
$$

For numerical solution of (P), a set of points $t_1, \dots, t_m$ are selected in T and the following problem is solved.

$$
(P') \quad \min_{x_j, j=1,\dots,n} \; \max_{i=1,\dots,m} \; |f(t_i) - \sum_{j=1}^{n} x_j f_j(t_i)|
$$

(a) What conclusions can be drawn concerning the optimal value of (P) from an optimal solution to (P')?

(b) (P') looks complex, with an inner maximization and an outer minimization. Reformulate (P') as a mathematical programming problem of simplest possible kind.

(c) Determine the dual problem to the problem formulated in Exercise 1.10b and simplify as far as possible.

2. Flöden i nätverk

2.1 Betrakta följande TP med 3 st leverantöreröch 4 st ”kunder”.

Tillgången hos respektive leverantör är 11, 9 och 13 enheter.

Efterfrågan hos respektive kund är 6, 6, 4 och 10 enheter.

Transportkostnaden per enhet från resp leverantör till resp kund ges av följande tabell (där även de ovan givna siffrorna är införda för tydlighets skull):

	Kund 1	Kund 2	Kund 3	Kund 4	Tillgång
Lev.1	3	4	6	4	11
Lev.2	3	3	3	2	9
Lev.3	4	5	5	2	13
Efterfr.	6	6	4	10	

Problemet går ut på att bestämma hur många enheter som ska skickas från resp leverantör till resp kund för att den totala transportkostnaden ska bli så liten som möjligt.

(a) Formulera ovanstående problem som ett LP-problem, med likhetsbivillkor för efterfrågekraven och olikhetsbivillkor för tillgångsbegränsningarna. Inför slackvariabler (för olikhetsbivillkoren) och visa att dessa kan uppfattas som transportvariabler till en extra dummy-kund. (Kund nr 5.)

Hur stor ”efterfråganska denne 5:e kund tillskrivas för att det resulterande transportproblemet ska bli balanserat?

(b) Lös ovanstående transportproblem (i balanserad form) med transportalgoritmen. Använd Nortwest Corner Ruleför att bestämma en startbaslösning.

(c) Besvara, mha sluttablån, följande känslighetsanalysfrågor:

Antag att c_{21} (= transportkostnaden från Lev.2 till Kund 1) ändras från $c_{21} = 3$ till $c_{21} = 3 + \delta$.

För vilka värden på δ gäller att Din optimala lösning ovan fortfarande är optimal till detta nya problem?

(d) Antag nu istället att det är c_{22} som ändras från $c_{22} = 3$ till $c_{22} = 3 + \delta$ (medan $c_{21} = 3$).

Mellan vilka gränser på δ gäller att Din optimala lösning ovan fortfarande är optimal till detta nya problem?

2.2 Betrakta ett balanserat Transportproblem på formen:

$$
(TP) \quad
\begin{array}{lrcll}
\min & \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} & & & \\
\text{då} & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} & = & a_i, & i = 1, \ldots, m \\
& \sum_{i=1}^{m} x_{ij} & = & b_j, & j = 1 \ldots, n \\
& x_{ij} & \geq & 0 & \text{alla } i \text{ och } j.
\end{array}
$$

a_i = tillgången hos leverantör nr i ,
b_j = efterfrågan hos kund nr j,
c_{ij} = transportkostnad per enhet från lev.i till kund j.

$$\text{Data:}\quad \begin{array}{lrrrrrr} m = & 3 \\ n = & 6 \\ a_i: & 25 & 15 & 30 \\ b_j: & 15 & 19 & 7 & 12 & 14 & 3 \\ c_{ij}: & 8 & 4 & 7 & 4 & 6 & 5 \\ & 9 & 4 & 8 & 6 & 7 & 7 \\ & 6 & 2 & 5 & 4 & 6 & 5 \end{array}$$

(a) Verifiera att följande lösning är optimal. Ange optimalvärdet.

$$\begin{array}{lrrrrrr} x_{ij}: & 0 & 0 & 0 & 12 & 10 & 3 \\ & 0 & 11 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ & 15 & 8 & 7 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

(b) Ställ upp det duala LP-problemet (D) till (TP). Ange en optimal lösning och optimalvärdet till detta duala problem.

(c) Antag att både a_1 och b_1 samtidigt ändras med δ. Dvs $a_1 = 25 + \delta$ och $b_1 = 15 + \delta$.
Hur ändras optimallösningen och optimalvärdet till (TP) resp (D) som funktion av δ, för tillräckligt små"ändringar δ?

(d) Bestäm gränser på δ (uppåt och nedåt) för att ditt svar på (c)-uppgiften ovan skall gälla.

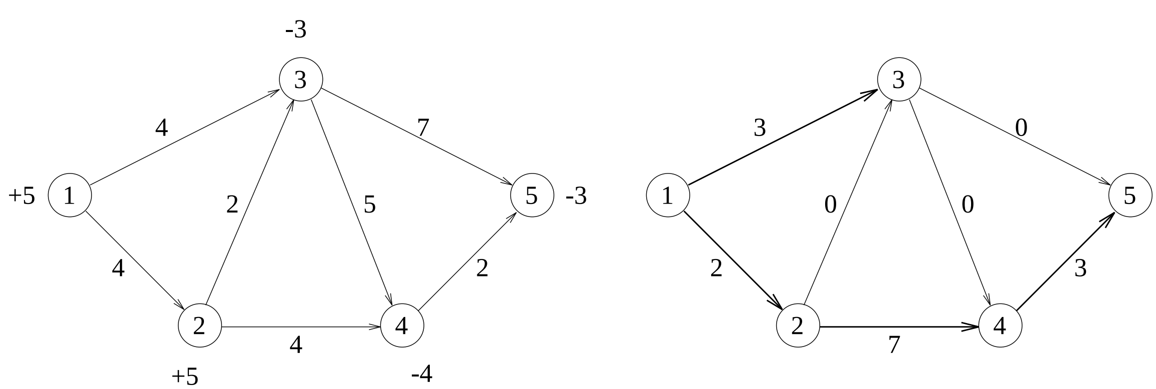
2.3 Betrakta Minkostnadsflödesproblemet i vänstra figuren nedan.

I varje nod står dess nodnummer, och bredvid varje nod står dess tillgång b_i (som är negativ för noder med efterfrågan).

På varje båge står dess kostnad c_{ij} kr per flödesenhet.

(a) Visa att lösningen i högra figuren nedan är optimal. På varje båge står det aktuella flödet x_{ij}.

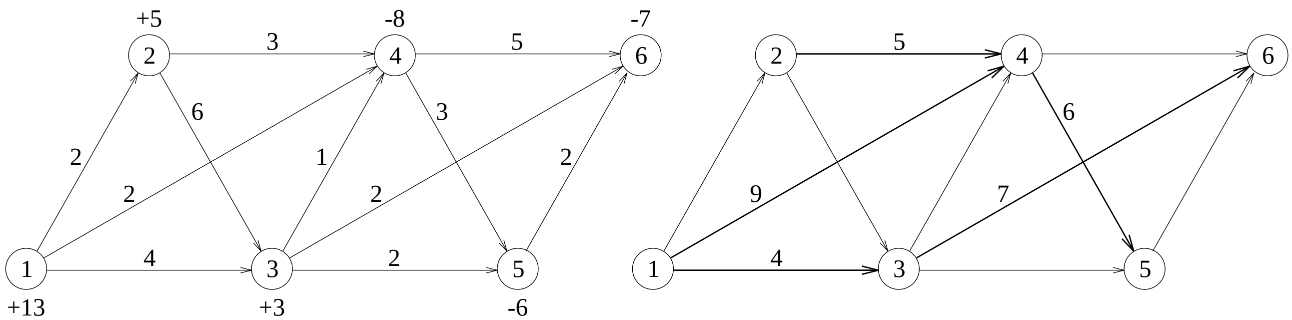
(b) Antag att c_{34} ändras från 5 till 3. Då är lösningen i högra figuren nedan inte längre optimal (eller hur?).
Bestäm därför en optimal lösning till detta nya problem (med $c_{34} = 3$). Utgå lämpligen från den givna lösningen.



2.4 Betrakta Minkostnadsflödesproblemet i vänstra figuren nedan.

I varje nod står dess nodnummer, och bredvid varje nod står dess tillgång b_i (som är negativ för noder med efterfrågan).

På varje båge står dess kostnad c_{ij} kr per flödesenhet.



(a) Visa att lösningen i högra figuren ovan är optimal. På varje båge står det aktuella flödet x_{ij}.

(b) Formulera det aktuella minkostnadsflödesproblem som ett LP-problem och ställ upp dess duala LP-problem.

Ange även en optimal lösning till detta duala problem!

(c) Antag att behovet i nod 4 ökar med $\delta > 0$ (dvs $b_4 = -8 - \delta$) samtidigt som tillgången i nod 3 ökar med samma δ (dvs $b_3 = 3 + \delta$).

Ange hur optimallösningen och optimalvärdet beror av δ för tillräckligt små"värden på δ. Ange även hur optimallösningen till det duala problemet beror av δ för dessa värden på δ.

Ange slutligen hur stort δ som högst får bli för att dina svar ovan ska gälla (dvs bestäm vad tillräcklig småbetyder i detta fall).

2.5 Ett producerande företag har 3 fabriker och 5 försäljningsställen.

En viss månad gäller att var och en av fabrikerna kan tillverka 100 ton av företagets produkt. Den sammanlagda produktionen ska fördelas lika på de olika försäljningsställena (butikerna") så att vart och ett av dessa erhåller 60 ton av produkten.

Frågan är hur mycket man ska transporteras från respektive fabrik till respektive försäljningsställe.

Svaret ges av att man önskar minimera den totala transportkostnaden, då man har givet konstanterna c_{ij} = kostnaden per ton för att transportera från fabrik nr i till försäljningsställe nr j, för $i = 1, 2, 3$ och $j = 1, \ldots, 5$.

(a) Hjälp företaget att bestämma en optimal transportplan, då c_{ij}:na ges av nedanstående tabell (där varje rad svarar mot en fabrik och varje kolumn svarar mot ett försäljningställe). Använd Transportalgoritmen, med startlösning enligt North West Corner Rule".

	Försäljningsställe				
	nr. 1	nr. 2	nr. 3	nr. 4	nr. 5
Fabrik 1	3	3	6	4	4
Fabrik 2	3	4	5	3	5
Fabrik 3	3	5	7	4	5

(b) Formulera det duala LP-problemet till ovanståenede transportproblem och ange en optimal lösning till detta duala problem.

2.6 Assignmentproblem kan skrivas på följande form:

$$(AP)\quad \begin{array}{lrcll} \min & \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} & & & \\ \text{då} & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} & = & 1 & i=1,\ldots,n \\ & \sum_{i=1}^{n} x_{ij} & = & 1 & j=1,\ldots,n \\ & x_{ij} & \geq & 0, & \text{för alla } i,j \end{array}$$

Betrakta speciellt ett (mycket litet) (AP) med följande data:

$n=3,\ c_{11}=c_{12}=c_{21}=1,\ c_{13}=c_{22}=c_{31}=2,\ c_{23}=c_{32}=c_{33}=5.$

Använd Transportalgoritmen för att lösa detta AP. Välj startbaslösning enligt Northwest corner rule". (Första baslösningen får då $z=8$.)

(De baslösnigar som genereras är degenererade, dvs vissa basvariabler har värdet 0, men det är bara att räkna på ändå. Det som kan hända är att variablernas värden inte ändras i vissa iterationer.)

2.7 Låt $\mathcal{B}=\{(1,2),\ (1,3),\ (2,3),\ (2,4),\ (3,4),\ (3,5),\ (4,5),\ (4,6),\ (5,6)\}$ och betrakta följande LP-problem i variablerna $\{x_{ij}\mid (i,j)\in\mathcal{B}\}$:

$$(P)\quad \begin{array}{lrcll} \min & \sum_{(i,j)\in\mathcal{B}} c_{ij}x_{ij} & & & \\ \text{då} & x_{12}+x_{13} & = & b_1 & \\ & -x_{12}+x_{23}+x_{24} & = & b_2 & \\ & -x_{13}-x_{23}+x_{34}+x_{35} & = & b_3 & \\ & -x_{24}-x_{34}+x_{45}+x_{46} & = & b_4 & \\ & -x_{35}-x_{45}+x_{56} & = & b_5 & \\ & -x_{46}-x_{56} & = & b_6 & \\ & x_{ij} & \geq & 0, & \text{för alla } i,j \end{array}$$

där: $b_1=7,\quad b_2=4,\quad b_3=0,\quad b_4=0,\quad b_5=-5,\quad b_6=-6,$
$c_{12}=2,\quad c_{13}=3,\quad c_{23}=3,\quad c_{24}=5,\quad c_{34}=2,$
$c_{35}=2,\quad c_{45}=2,\quad c_{46}=5,\quad c_{56}=4.$

Detta LP-problem kan tolkas som ett minkostnadsflödesproblem (MKFP) i ett visst riktat nätverk.

(a) Åskådliggör detta MKFP genom att rita motsvarande nätverk.

(b) Som bekant svarar baslösningar till MKFP mot (oriktade) uppspännande träd i nätverket. Ett (av flera) uppspännande träd i det aktuella nätverket ges av bågmängden $\mathcal{T}=\{(1,3),\ (2,4),\ (3,4),\ (3,5),\ (4,6)\}$.

Bestäm motsvarande baslösning och verifiera att den är en tillåten baslösning med målfunktionsvärdet $=85$.

(c) Är den ovan bestämda baslösningen optimal? Om inte, bestäm en optimal lösning till problemet! Ange även optimalvärdet.

3. Konvexitet

3.1 Let C and D be two convex sets, $\alpha \in I\!R$ and $f : C \to I\!R$ a convex function. Show that the following sets are convex.

(a) $\alpha C = \{\alpha x | x \in C\}$.

(b) $C \bigcap D$.

(c) $C + D = \{x + y | x \in C, y \in D\}$.

(d) $\{x \in C | f(x) \leq \alpha\}$.

(e) $\operatorname{epi} f = \{(x, \mu) \in C \times I\!R | f(x) \leq \mu\}$.

3.2 Let C_α denote a convex set in $I\!R^n$ for each α in the index set A. Show that $\bigcap_{\alpha \in A} C_\alpha$ is a convex set.

3.3 Let f and g be convex functions on a convex set C, and let α be a positive constant. Show that the following functions are convex on C.

(a) $f + g$.

(b) αf.

(c) $\max\{f, g\}$.

3.4 Let f_α be convex functions (defined on the same convex set C) for each α in the index set A. Show that $\sup_{\alpha \in A} f_\alpha$ is a convex function.

3.5 Let $f : I \to I\!R$ be a nondecreasing convex function on the interval $I \subseteq I\!R$, and let $g : C \to I$ be a convex function on the convex set $C \subseteq I\!R^n$. Show that $f(g(x))$ is a convex function on C.

3.6 Which of the following functions are convex?

(a) $f(x) = \ln(e^{x_1} + e^{x_2})$.

(b) $f(x) = \ln(\sum_{i=1}^n e^{a_i x_i})$.

(c) $f(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$.

(d) $f(x) = x_1^2 / x_2$, for $x_2 > 0$.

(e) $f(x) = -\sqrt{x_1 x_2}$, for $x_1, x_2 > 0$.

(f) $f(x) = -(\prod_{i=1}^n x_i)^{1/n}$, for $x_i > 0$.

3.7 Show the inequality between the arithmetic and the geometric mean, i.e., show that for $x_i > 0$, it holds that $(\prod_{i=1}^n x_i)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$.

3.8 **(a)** Let $x_1, \ldots, x_m \in I\!R^n$ be given. Show that

$$C = \{x \in I\!R^n | \text{ There exist } t_i \geq 0 \text{ such that } x = \sum_{i=1}^m t_i x_i, \sum_{i=1}^m t_i = 1\}$$

is a convex set.

(b) Suppose that X is a convex subset of $I\!R^n$ and that $x_1, \ldots, x_m \in X$. Show that $\sum_{i=1}^m t_i x_i \in X$, if $t_i \geq 0$ and $\sum_{i=1}^m t_i = 1$.

4. Ickelinjär optimering

4.1 Man vill anpassa kurvan $y = a + bt^2$ till de givna punkterna (t_i, y_i) som ges i tabellen nedan. Man vill använda s k minstakvadrat anpassning, vilket innebär att parametrarna a och b bestäms så att följande kvadratsumma minimeras:

$$S(a,b) = \sum_{i=1}^{5}(a + bt_i^2 - y_i)^2$$

(a) Visa att S är en kvadratisk funktion av a och b, och minimera $S(a,b)$ genom att lösa ett lämpligt ekvationssystem.

(b) Visa att dina ovan erhållna värden på a och b verkligen minimerar $S(a,b)$, lämpligen genom att bilda 2:a derivatsmatrisen till S och studera denna. (Kända satser får användas utan bevis.)

i	1	2	3	4	5
t_i	-2	-1	0	1	2
y_i	7	4	2	3	6

4.2 8 st punkter $P_1, \ldots, P_8$ i planet har de givna koordinaterna:

$$(x_1, y_1),\ (x_2, y_2),\ \ldots,\ (x_8, y_8).$$

(a) Man vill välja koordinater (x, y) för ytterligare en punkt P på ett sådant sätt att summan av de 8 st avstånden från P till P_i, $(i = 1, \ldots, 8)$ blir så liten som möjligt.

Formulera detta som ett optimeringsproblem i variablerna x och y.

Bestäm även ett analytiskt uttryck på gradienten till målfunktionen, och avgör om denna gradient existerar överallt.

(b) Man vill nu istället välja koordinater (x, y) för punkten P på ett sådant sätt att summan av kvadraterna på de 8 st avstånden från P till P_i, $(i = 1, \ldots, 8)$ blir så liten som möjligt.

Formulera detta som ett optimeringsproblem i variablerna x och y.

Visa att målfunktionen är kvadratisk och konvex.

Härled det linjära ekvationssystem man behöver lösa för att bestämma optimallösningen. Lös detta ekvationssystem och bestäm ett explicit uttryck för den optimala placeringen av punkten P.

4.3 **(a)** Man vill minimera den kvadratiska tvåvariabelfunktionen:

$$p(x_1, x_2) = (x_1 - x_2)^2 + (x_1 + x_2)^2 + (x_1 + 2x_2 - 1)^2.$$

Bestäm en minpunkt till $p(x_1, x_2)$, lämpligen genom att lösa ett visst ekvationssystem.

Är Din erhållna lösning ett globalt minimum? Motivera!

(b) Nu vill man istället minimera den ickekvadratiska funktionen:

$$f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2)^2 + (x_1 + x_2)^2 + (x_1 + 2x_2 - 1)^2 + 7x_1^3/3.$$

Utför två iterationer med Newtons metod, med start i $x_1 = x_2 = 0$.
Du behöver inte utföra någon linjesökning, det räcker att du tar ”enhetssteg”($\boldsymbol{x}^{k+1} = \boldsymbol{x}^k + \boldsymbol{d}^k$).

4.4 Betrakta följande ickelinjära optimeringsproblem:

$$
(P) \quad \begin{array}{lrcl}
\max & 2x_1 + 3x_2 & & \\
\text{då} & x_1 x_2 & \leq & 4 \\
& x_1^2 + x_2^2 & \leq & 20.5 \quad \text{(cirkel med radie} \approx 4.53) \\
& x_1 + x_2 & \leq & 5 \\
& x_1 \geq 0, \quad x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Åskådliggör problemet i en figur och bestäm med hjälp av denna samtliga lokala optima (lokala maxpunkter) till (P).

4.5 Betrakta följande ickelinjära optimeringsproblem:

$$
(P) \quad \begin{array}{lrcl}
\max & 2x_1 - x_2^2 & & \\
\text{då} & x_1^2 - 2x_2 & \leq & 0 \\
& 2x_1 + x_2^2 - 2 & \leq & 0 \\
& x_1^2 + x_2 - 1 & \leq & 0
\end{array}
$$

Åskådliggör problemet (P) i en figur och bestäm med hjälp av denna och smärre analytiska beräkningar, den optimala lösningen till (P).

4.6 Låt tvåvariabelfunktionen f vara definierad genom:

$$f(\boldsymbol{x}) = 2x_1^3 + x_1 x_2^2 - 6x_1^2 - x_2^2, \quad x \in I\!R^2$$

(a) I vilken eller vilka av följande fyra punkter har den givna funktionen ett lokalt maximum ?

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}^\mathsf{T}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}^\mathsf{T}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \end{pmatrix}^\mathsf{T}, \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{6} \end{pmatrix}^\mathsf{T}.$$

Motivera svaret ordentligt!

(b) Har $f(\boldsymbol{x})$ ett globalt maximum i någon av de fyra punkterna?

4.7 Betrakta följande tre kvadratiska funktioner, definierade på $I\!R^2$:

$$
\begin{aligned}
f_1(\boldsymbol{x}) &= 6x_1 - 2x_2 - 5x_1^2 + 4x_1 x_2 - x_2^2 \\
f_2(\boldsymbol{x}) &= 22x_1 + 8x_2 - 8x_1^2 - 6x_1 x_2 - x_2^2 \\
f_3(\boldsymbol{x}) &= 70x_1 + 130x_2 - 36x_1^2 - 64x_2^2
\end{aligned}
$$

(a) Bestäm vilken eller vilka av dessa funktioner som har ett lokalt maximum i punkten $\bar{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}^\mathsf{T}$. Motivera svaret ordentligt.

(b) För den eller de av ovanstående funktioner som inte har ett lokalt maximum i $\bar{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}^\mathsf{T}$ ska du bestämma en så kallad ascent-riktning i punkten $\bar{\boldsymbol{x}}$, dvs en riktning $\boldsymbol{d}$ sådan att $f(\bar{\boldsymbol{x}} + \alpha \boldsymbol{d}) > f(\bar{\boldsymbol{x}})$ för alla tillräckligt små $\alpha > 0$.

4.8 Betrakta en rätvinklig låda med längden $= x$ cm, bredden $= y$ cm och höjden $= z$ cm. Man vill välja x, y och z så att lådans volym maximeras under bivillkoret att längden på rymddiagonalen i lådan ska vara $= 120$ cm.

(a) Formulera detta som ett optimeringsproblem i variablerna x, y och z.

(b) Visa att lösningen $x = y = z = \sqrt{4800}$ (≈ 69.3) uppfyller 1:a ordningens nödvändiga villkor för ett lokalt optimum.

4.9 Formen på en vanlig pappkartong bestäms av de tre variablerna x_L, x_B och x_H, med betydelsen längd, bredd resp höjd.

Materialkostnaden för en viss kartong antas ges av uttrycket: $C_1\cdot$(ytan av botten + ytan av locket) + $C_2\cdot$(summan av de övriga fyra sidornas ytor),

där C_1 och C_2 är givna positiva konstanter.

(a) Formulera, som ett ickelinjärt optimeringsproblem med ett likhetsbivillkor, problemet att välja en ur materialkostnadssynpunkt optimal form på en kartong med den givna volymen 1 m^3.

Du behöver för enkelhets skull inte explicit ange och behandla positivitetskraven på variablerna. Dessa kommer ändå att bli uppfyllda i optimallösningen.

Kalla detta problem (P_1).

(b) Ställ upp första ordningens optimalitetsvillkor för (P_1).

(c) Överför problemet till ett problem utan bivillkor genom att ur volymsbivillkoret lösa ut någon av dina variabler som funktion av de övriga.

Kalla detta nya problem (som bara har två variabler) (P_2).

Ställ upp första ordningens optimalitetsvillkor för (P_2) och bestäm, analytiskt, optimal kartongform (som funktion av C_1 och C_2).

4.10 Antag att man vill bestämma strömmarna x_{ij} i de olika länkarna (bågarna") i ett transportproblemliknande"elektriskt nätverk med m st källnoder och n st sänknoder. Det går en länk från varje källnod till varje sänknod, men inga (direkt-)länkar mellan olika källnoder eller mellan olika sänknoder.

Totalt finns alltså $m \times n$ länkar i nätverket.

Totala strömmen ut från respektive källnod är given av de positiva talen $a_1, \dots, a_m$, medan totala strömmen in till respektive sänknod är given av de positiva talen $b_1, \dots, b_n$, där förstås $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$.

De olika länkarna har givna resistanser $r_{ij} > 0$.

Man leds då till följande QP-problem, där målfunktionen är totala effekten (värmeförlusten) medan bivillkoren är balansekvationer för strömmarna:

$$
(QP) \quad
\begin{array}{lrcll}
\min & \frac{1}{2}\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n r_{ij} x_{ij}^2 & & & \\
\text{då} & \sum_{j=1}^n x_{ij} & = & a_i, & i = 1, \dots, m \\
 & \sum_{i=1}^m x_{ij} & = & b_j, & j = 1, \dots, n
\end{array}
$$

(Notera skillnaderna mot det vanliga transportproblemet (TP):
I (QP) är målfunktionen kvadratisk, i (TP) är den linjär.
I (TP) måste variablerna uppfylla $x_{ij} \geq 0$, vilket inte krävs i (QP)!)

(a) Det väsentliga arbetet för att bestämma optimal lösning till (QP) ovan består i att lösa ett linjärt ekvationssystem med $m+n-1$ st variabler och lika många ekvationer.

Ställ upp detta ekvationssystem på explicit form! Kalla lämpligen variablerna i ekvationssystemet för $u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_{n-1}$ (= dualvariabler"eller nodpotentialer").

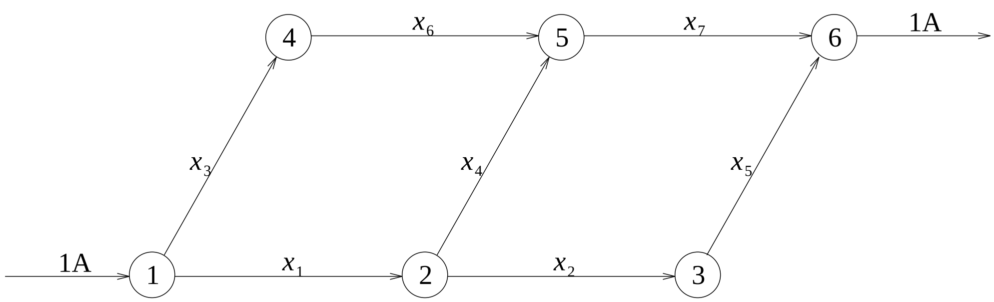
Avgör vidare om ekvationssystemet alltid har en entydig lösning.

(b) Antag nu att alla resistanser r_{ij} är lika stora, säg $r_{ij} = 1$ för alla i och j. Visa att optimal lösning till (QP) då ges av:

$$x_{ij} = \frac{1}{n} \cdot a_i + \frac{1}{m} \cdot b_j - \frac{1}{m \cdot n} \cdot S, \qquad \text{där } S = \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

Konstruera slutligen ett exempel, med $m = n = 2$, där minst ett $x_{ij} < 0$ i optimallösningen och rita ut strömmarna i nätverket.

4.11 I nedanstående elektriska nätverk har var och en av länkarna resistansen 1Ω.



Om man skickar strömmen 1A från nod 1 till nod 6, så blir strömmarna x_j i de olika länkarna optimal lösning till följande QP-problem:

$$(QP) \quad \begin{array}{lll} \min & \frac{1}{2} \cdot \sum_{j=1}^{7} x_j^2 & (= \frac{1}{2} \cdot \text{ totala värmeförlusten}) \\ \text{då} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} & (\text{Kirchhoffs 1:a lag,} \\ & & \ \text{dvs strömbalans i noderna}) \end{array}$$

där $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{pmatrix}$,

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{1} \end{pmatrix} \text{ och } \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cancel{1} \end{pmatrix}$$

Sista raden i $\boldsymbol{A}$ och $\boldsymbol{b}$ kan som bekant strykas pga redundans. $\boldsymbol{A}$ blir då en 5×7-matris med linjärt oberoende rader.

(a) Ställ upp optimalitetsvillkoren för (QP) i $\boldsymbol{x} \in I\!R^7$ och $\boldsymbol{u} \in I\!R^5$ (där $\boldsymbol{u}$ är lagrangemultiplikatorvektorn) och visa att detta leder till ett linjärt ekvationssystem i $\boldsymbol{x}$ och $\boldsymbol{u}$.

Om $\boldsymbol{x}$ elimineras ur detta så erhålls ett ekvationssystem i enbart $\boldsymbol{u}$. Ställ upp detta system explicit och visa att det har den entydiga lösningen $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1.4 & 0.8 & 0.4 & 1.0 & 0.6 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}$.

Bestäm slutligen optimal lösning $\boldsymbol{x}$ till (QP). (Kan du också ge en fysikaliskt tolkning av $\boldsymbol{u}$?)

(b) Ett alternativt sätt att bestämma optimalt $\boldsymbol{x}$ till (QP) är att använda en nollrumsmetod enligt följande:

Visa först att $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}$ är en tillåten lösning till (QP) och att de båda kolumnerna i matrisen $\boldsymbol{Z}$ (slingströmmarna"),

$$\boldsymbol{Z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \text{ utgör en bas i nollrummet till } \boldsymbol{A}.$$

Använd detta för att bestämma optimal lösning till (QP).

4.12 Consider the problem (P), defined as

$$(P) \quad \begin{array}{ll} \min & -2x_1^2 + 12x_1x_2 + 7x_2^2 - 8x_1 - 26x_2 \\ \text{s.t.} & x_1 + 2x_2 \le 6, \\ & 0 \le x_1 \le 3, \\ & x_2 \ge 0. \end{array}$$

(a) Find *all* points that satisfy the KT-conditions for (P).

(b) Find a global minimizer to (P).

(Note that the amount of computation required would be very large using this strategy on larger problems.)

Svar och/eller lösningar till övningsexemplen

5. Linjär optimering

1.1 Inför följande variabler, för $j = 1, \ldots, 6$:

x_j = antal kg korv som tillverkas vecka j till kostnaden C kr/kg,
y_j = antal kg korv som tillverkas vecka j till kostnaden D kr/kg,
z_j = antal kg korv som lagras från vecka j till vecka $j+1$.

Problemformulering:

$$\begin{array}{lrcll}
\min & \multicolumn{4}{l}{\sum_{j=1}^{6}(C \cdot x_j + D \cdot y_j + L \cdot z_j)} \\
\text{då} & x_1 + y_1 - z_1 & = & K_1 & \\
& x_j + y_j + z_{j-1} - z_j & = & K_j, & j = 2, \ldots, 6 \\
& 0 \le x_j & \le & A, & j = 1, \ldots, 6 \\
& 0 \le y_j & \le & B, & j = 1, \ldots, 6 \\
& z_j & \ge & 0, & j = 1, \ldots, 6
\end{array}$$

1.2 Inför följande variabler för den aktuella veckan:

x_{MH} = antal kg Havre som används till MUU,
x_{MR} = antal kg Råg som används till MUU,
x_{MP} = antal kg Potatis som används till MUU,
x_{GH} = antal kg Havre som används till GNÄGG,
x_{GR} = antal kg Råg som används till GNÄGG,
x_{GP} = antal kg Potatis som används till GNÄGG.

Problemformulering: v

$$\begin{array}{lrcl}
\min & \multicolumn{3}{l}{1.25x_{MH} + 1.25x_{GH} + 1.0x_{MR} +} \\
& \multicolumn{3}{l}{\quad + 1.0x_{GR} + 1.5x_{MP} + 1.5x_{GP}} \\
\text{då} & x_{MR} + x_{MH} + x_{MP} & = & 2000 \\
& x_{GH} + x_{GR} + x_{GP} & = & 1000 \\
& x_{MH} + x_{GH} & \le & 1000 \\
& x_{MR} + x_{GR} & \le & 1000 \\
& x_{MP} + x_{GP} & \le & 2000 \\
& 32x_{MH} + 24x_{MR} + 49x_{MP} & \ge & 76000 \\
& 32x_{GH} + 24x_{GR} + 49x_{GP} & \ge & 33000 \\
& 7x_{MH} + 8x_{MR} + 12x_{MP} & \ge & 14000 \\
& 7x_{GH} + 8x_{GR} + 12x_{GP} & \ge & 9000 \\
& 10x_{MH} + 7x_{MR} + 5x_{MP} & \ge & 12000 \\
& 10x_{GH} + 7x_{GR} + 5x_{GP} & \ge & 7000 \\
& x_{MH},\ x_{MR},\ x_{MP},\ x_{GH},\ x_{GR},\ x_{GP} & \ge & 0
\end{array}$$

1.3 Inför följande variabler:

x_A = antal lådor Äppelmust som produceras per vecka,
x_P = antal lådor Päronmust som produceras per vecka,
x_B = antal lådor Blandmust som produceras per vecka,
x_C = antal lådor Cidermust som produceras per vecka.

$\geq 10\%$ Äppelmust $\Rightarrow x_A \geq \frac{1}{10}(x_A+x_P+x_B+x_C) \Rightarrow x_P+x_B+x_C-9x_A \leq 0.$

$\leq 40\%$ Äppelmust $\Rightarrow x_A \leq \frac{4}{10}(x_A+x_P+x_B+x_C) \Rightarrow \frac{3}{2}x_A-x_P-x_B-x_C \leq 0.$

Intäkt - kostnad för Äppelmust = 200 - 55 = 145 kr/låda.

Problemformulering:

$$
\begin{array}{lrcl}
\max & 145x_A + 155x_P + 150x_B + 180x_C & & \\
\text{då} & 2.0x_A + 2.6x_P + 2.5x_B + 4.0x_C & \leq & 80 \\
& 1.4x_A + 1.4x_P + 1.4x_B + 1.8x_C & \leq & 40 \\
& -9x_A + x_P + x_B + x_C & \leq & 0 \\
& 1.5x_A - x_P - x_B - x_C & \leq & 0 \\
& x_A - 9x_P + x_B + x_C & \leq & 0 \\
& -x_A + 1.5x_P - x_B - x_C & \leq & 0 \\
& x_A + x_P - 9x_B + x_C & \leq & 0 \\
& -x_A - x_P + 1.5x_B - x_C & \leq & 0 \\
& x_A + x_P + x_B - 9x_C & \leq & 0 \\
& -x_A - x_P - x_B + 1.5x_C & \leq & 0 \\
& x_A \geq 0,\ \ x_P \geq 0,\ \ x_B \geq 0,\ \ x_C & \geq & 0.
\end{array}
$$

1.4 **(a)** Låt x_j = antal kg/dag av födoslag nr j som teknologen förtär.
Problemformulering: (med slackvariabler s_1, s_2 och s_3)

$$
\begin{array}{lrcll}
\max & \sum_{j=1}^{6} c_j x_j & & & \\
\text{då} & \sum_{j=1}^{6} p_j x_j - s_1 & = & P_{min}, & \\
& \sum_{j=1}^{6} k_j x_j - s_2 & = & K_{min}, & \\
& \sum_{j=1}^{6} k_j x_j + s_3 & = & K_{max}, & \\
& x_j & \geq & 0, & j = 1, \ldots, 6, \\
& s_i & \geq & 0, & i = 1, 2, 3.
\end{array}
$$

(b) Vi har 9 variabler $(x_1, \ldots, x_6, s_1, s_2, s_3)$ och 3 likhetsbivillkor. I den optimala lösningen (erhållen med Simplexmetoden) har man 3 st basvariabler. Övriga 6 st variabler har värdet 0 i optimum. Vidare måste minst en av s_2 och s_3 vara > 0 i optimum (förutsatt att $K_{max} > K_{min}$, men om $K_{max} = K_{min}$ så kan de båda sista bivillkoren ovan slås ihop till ett bivillkor $\sum_{j=1}^{6} k_j x_j = K_{min}$ med samma slutsats som nedan). Högst 2 st x_j-variabler är alltså basvariabler i den optimala lösningen, och därmed ingår högst två olika födoslag i den optimala dieten!

1.5 Inför följande variabler för den aktuella planeringsperioden: X_{11}, X_{M1}, X_{M2}, X_{12}, X_{21}, X_{1M}, X_{2M} och X_{22}, med betydelsen:

X_{11} = antal kubikmeter som flottas från S1 till F1, osv.

Problemformulering:

$$
\begin{array}{lrcll}
\min & \multicolumn{4}{l}{C_{11}X_{11} + C_{M1}X_{M1} + C_{M2}X_{M2} + C_{12}X_{12} + C_{21}X_{21} +} \\
 & \multicolumn{4}{l}{\quad + C_{1M}X_{1M} + C_{2M}X_{2M} + C_{22}X_{22}} \\
\text{då} & X_{11} + X_{1M} & = & 3500 & \text{(ut från S1)} \\
 & X_{22} + X_{2M} & = & 4500 & \text{(ut från S2)} \\
 & X_{1M} + X_{2M} - X_{M1} - X_{M2} & = & 0 & \text{(balansvillkor i M)} \\
 & X_{11} + X_{M1} - X_{12} + X_{21} & = & 5000 & \text{(netto in till F1)} \\
 & X_{22} + X_{M2} + X_{12} - X_{21} & = & 3000 & \text{(netto in till F1)} \\
 & \text{alla variabler } X_{ij} & \geq & 0 &
\end{array}
$$

1.6 Låt x_j = antal kg P_j som blandas till per vecka,
och u_i = antal kg R_i som köps in per vecka.

LP-formulering:

$$
\begin{array}{llcll}
\max & \sum_j c_j x_j - \sum_i d_i u_i & & & (1) \\
\text{då} & \sum_j a_{ij} x_j - u_i & = & 0 \quad \text{för alla i} & (2) \\
 & \sum_j t_j x_j & \leq & 40 & (3) \\
 & 0 \leq x_j & \leq & u_j \quad \text{för alla j} & (4) \\
 & u_i & \geq & 0 \quad \text{för alla i} & (5)
\end{array}
$$

(Anmärkning: Eftersom a_{ij}:na är ickenegativa tal så kommer (5) automatiskt att bli uppfyllt om u_i:na elimineras ur problemet m h a (2). Man får då ett LP-problem i enbart variablerna x_j.)

1.7 **(a)** Tillåten baslösning med alla $r_j \geq 0$.

(b) $y_1 = 4,\ y_2 = -1$.

(c) $-\frac{2}{3} \leq \delta \leq \frac{1}{2},\ z = 13 - 5\delta$.

(d) Om $-\frac{2}{3} \leq \delta \leq \frac{1}{2}$ så är $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}$ och $z = 13 - 5\delta$.
Om $\frac{1}{2} < \delta \leq 4$ så är $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}$ och $z = 10 + \delta$.
Om $-3 \leq \delta < -\frac{2}{3}$ så är $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}$ och $z = 11 - 8\delta$.

1.8 **(a)** LP-problemet (P) och dess duala problem (D):

$$
(P) \quad
\begin{array}{lrcll}
\min & \multicolumn{4}{l}{3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4} \\
\text{då} & x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 & \geq & 12 & (p1) \\
 & 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 & \geq & 9 & (p2) \\
 & x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 & \geq & 9 & (p3) \\
 & 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & \geq & 7 & (p4) \\
 & x_j & \geq & 0, \quad j = 1, \ldots, 4. &
\end{array}
$$

$$
(D)\quad
\begin{array}{lrcll}
\max & 12y_1 + 9y_2 + 9y_3 + 7y_4 & & & \\
\text{då} & y_1 + 4y_2 + y_3 + 3y_4 & \leq & 3 & \qquad (d1)\\
& 2y_1 + 3y_2 + y_3 + y_4 & \leq & 4 & \qquad (d2)\\
& 3y_1 + 2y_2 + y_3 + y_4 & \leq & 5 & \qquad (d3)\\
& 4y_1 + y_2 + 3y_3 + y_4 & \leq & 2 & \qquad (d4)\\
& y_i & \geq & 0 \quad i = 1, \dots, 4. &
\end{array}
$$

Om $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix}^\mathsf{T}$ är optimal lösning till (D) så måste, enligt komplementaritetssatsen, följande gälla för den optimala lösningen $\boldsymbol{x}$ till (P):

$x_2 = x_3 = 0$ eftersom $(d2)$ och $(d3)$ är uppfyllda med strikt olikhet.
$(p1)$ och $(p2)$ måste vara uppfyllda med likhet eftersom y_1 och $y_2 > 0$.

Alltså gäller att $x_1 + 4x_4 = 12$ och $4x_1 + x_4 = 9$, varur följer att $x_1 = 1.6$ och $x_4 = 2.6$.

Nu kollar vi att $\mathbf{y}$ enligt ovan verkligen är optimal till (D):

$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1.6 & 0 & 0 & 2.6 \end{pmatrix}^\mathsf{T}$ är tillåten till (P) och

$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix}^\mathsf{T}$ är tillåten till (D).

Vidare gäller att $\boldsymbol{c}^\mathsf{T}\boldsymbol{x} = 3\cdot 1.6 + 2\cdot 2.6 = 10$, medan $\mathbf{y}^\mathsf{T}\boldsymbol{b} = \frac{1}{3}\cdot 12 + \frac{2}{3}\cdot 9 = 10$, dvs $\boldsymbol{c}^\mathsf{T}\boldsymbol{x} = \mathbf{y}^\mathsf{T}\boldsymbol{b}$.

Därmed är $\boldsymbol{x}$ optimal till (P) och $\mathbf{y}$ optimal till (D).

(b) Skriv (P) på likhetsform, med surplus-variabler $x_5, \dots, x_8$:

$$
\begin{array}{lrcll}
\min & 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 + 0x_8 & & & \\
\text{då} & x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 - x_5 & = & 12 & \qquad (p1)\\
& 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 - x_6 & = & 9 & \qquad (p2)\\
& x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 - x_7 & = & 9 & \qquad (p3)\\
& 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_8 & = & 7 & \qquad (p4)\\
& x_j & \geq & 0, \quad j = 1, \dots, 8 &
\end{array}
$$

Enligt (a) är x_1, x_4, x_7 och x_8 basvariabler i optimum, så att:

$$
\mathbf{x}_\beta = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_7 \\ x_8 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ och } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 12 \\ 9 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix}.
$$

$\mathbf{A}_\beta \mathbf{x}_\beta = \mathbf{b}$ medför då att $\mathbf{x}_\beta = \begin{pmatrix} 1.6 & 2.6 & 0.4 & 0.4 \end{pmatrix}^\mathsf{T}$.

Om nu $\mathbf{b}$ ändras med $\delta \cdot \boldsymbol{e}_1$ så ändras $\mathbf{x}_\beta$ med $\Delta\mathbf{x}_\beta$, som erhålls ur: $\mathbf{A}_\beta \cdot \boldsymbol{\Delta}\mathbf{x}_\beta = \delta \cdot \boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} \delta & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^\mathsf{T} \Rightarrow \Delta\mathbf{x}_\beta = \begin{pmatrix} -\frac{\delta}{15} & \frac{4\delta}{15} & \frac{11\delta}{15} & \frac{\delta}{15} \end{pmatrix}^\mathsf{T} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boldsymbol{x}_\beta + \Delta\boldsymbol{x}_\beta = \begin{pmatrix} 1.6 - \frac{\delta}{15} & 2.6 + \frac{4\delta}{15} & 0.4 + \frac{11\delta}{15} & 0.4 + \frac{\delta}{15} \end{pmatrix}^\mathsf{T}$,

varur följer att: $-\frac{6}{11} \leq \delta \leq 24$ (för att $\boldsymbol{x}_\beta + \Delta\boldsymbol{x}_\beta$ ska vara $\geq \mathbf{0}$).

För dessa δ ändras optimallösningen enligt ovan, och $z^{opt} = 10 + \frac{\delta}{3}$.

1.9 **(a)** x_2 och x_3 basvariabler $\Rightarrow \mathbf{A}_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ och $\mathbf{A}_\beta^{-1} = \begin{pmatrix} -0.2 & 0.6 \\ 0.4 & -0.2 \end{pmatrix}$.

Då blir i sin tur $\mathbf{A}_\beta^{-1}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2.8 \\ 1.4 \end{pmatrix}$, OK!

Vidare blir $\mathbf{y}^\mathsf{T} = \mathbf{c}_\beta^\mathsf{T}\mathbf{A}_\beta^{-1} = \begin{pmatrix} 2.4 & 0.8 \end{pmatrix}$, varför reducerade kostnaderna blir $r_1 = c_1 - \mathbf{y}^\mathsf{T}\boldsymbol{a}_1 = 7 - 5.6 = 1.4 > 0$ och $r_4 = 6 - 4.8 = 1.2 > 0$. Eftersom båda ickebasvariablerna har strikt positiva r_j så är den föreslagna lösningen unikt optimal.

(b) $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 7+\delta \\ 7+\delta \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{A}_\beta^{-1}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2.8+0.4\delta \\ 1.4+0.2\delta \end{pmatrix}$ som är $\geq \mathbf{0}$ så länge $\delta \geq -7$.

Alltså: För alla $\delta \geq -7$ så är $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 & 2.8+0.4\cdot\delta & 1.4+0.2\cdot\delta & 0 \end{pmatrix}^\mathsf{T}$ optimal lösning till det högerleds-störda problemet.

Optimalvärdet ändras enligt: $z = y_1 \cdot (7+\delta) + y_2 \cdot (7+\delta) = 22.4 + 3.2\cdot\delta$.

(c) $\boldsymbol{c}^\mathsf{T} = \begin{pmatrix} 7+\delta & 4+\delta & 8+\delta & 6+\delta \end{pmatrix} \Rightarrow$ (om vi behåller samma bas) $\Rightarrow$ $\mathbf{y}^\mathsf{T} = \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{A}_\beta^{-1} = \begin{pmatrix} 4+\delta & 8+\delta \end{pmatrix}\mathbf{A}_\beta^{-1} = \begin{pmatrix} 2.4 & 0.8 \end{pmatrix} + \delta\cdot\begin{pmatrix} 0.2 & 0.4 \end{pmatrix}$.

Nya reducerade kostnader blir nu: (med x_2 och x_3 som basvar.)

$r_1 = 7 + \delta - 5.6 - \delta\cdot 0.8 = 1.4 + 0.2\cdot\delta$ som är ≥ 0 om $\delta \geq -7$,

$r_4 = 6 + \delta - 4.8 - \delta \cdot 1.4 = 1.2 - 0.4\cdot\delta$ som är ≥ 0 om $\delta \leq 3$,

och $r_2 = r_3 = 0$ förstås.

Alltså:

Lösningen från (a)-uppgiften är fortfarande optimal om $-7 \leq \delta \leq 3$.

1.10 Let

$$f(x) = \max_{t\in T} |f(t) - \sum_{J=1}^{n} x_j f_j(t)|$$
$$f_L(x) = \max_{t\in T_m} |f(t) - \sum_{J=1}^{n} x_j f_j(t)|$$

where $T_m = \{t_1, t_2, \dots, t_m\}$. Since T_m is a subset of T if holds that $f_L(x) \leq f(x)$, therefore (P') is a relaxation of (P). Furthermore let $\hat{x}_L$ be the optimal solution to (P') and p the optimal value to (P).

(a) Using the above notation we have

$$f_L(\hat{x}_L) \leq p \leq f(\hat{x}_L) = \max_{t\in T}|f(t) - \sum_{j=1}^{n} \hat{x}_{Lj} f_j(t)|$$

(b) (P') can be reformulated as

$$(P'') \quad \begin{array}{lll} \min & x_0 & \\ \text{s.t.} & x_0 + \sum_{j=1}^{n} x_j f_j(t_i) \geq f(t_i) & i = 1,\dots,m, \\ & x_0 - \sum_{j=1}^{n} x_j f_j(t_i) \geq -f(t_i) & i = 1,\dots,m, \\ & x_0 \geq 0. & \end{array}$$

(c) The dual of the problem formulated above is

$$
(D'') \qquad \begin{array}{lll}
\max & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} (\mu_i - \nu_i) f(t_i) & \\
\text{s.t.} & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} (\mu_i + \nu_i) \leq 1 & \\
& \displaystyle\sum_{i=1}^{m} (\mu_i - \nu_i) f_j(t_i) = 0 & j = 1, \ldots, n \\
& \mu_i,\, \nu_i \geq 0 & i = 1, \ldots, m.
\end{array}
$$

Since it is not optimal to have both μ_i and $\nu_i > 0$, we can simplify (D'') by introducing the variables $y_i = \mu_i - \nu_i$ with $|y_i| = \mu_i + \nu_i$. We then obtain the following problem

$$
(\tilde{D}'') \qquad \begin{array}{lll}
\max & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} y_i f(t_i) & \\
\text{s.t.} & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} |y_i| \leq 1 & \\
& \displaystyle\sum_{i=1}^{m} y_i f_j(t_i) = 0 & j = 1, \ldots, n
\end{array}
$$

6. Flöden i nätverk

2.1 (a)

$$
\begin{array}{llrcll}
(P) & \min & \multicolumn{4}{l}{\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} c_{ij}x_{ij}} \\
 & \text{då} & \sum_{j=1}^{4} x_{ij} & \leq & a_i, & i=1,2,3 \quad (1) \\
 & & \sum_{i=1}^{3} x_{ij} & = & b_j, & j=1\ldots,4 \quad (2) \\
 & & x_{ij} & \geq & 0 & \text{alla } i \text{ och } j.
\end{array}
$$

Inför slackvariabler $x_{15},\ x_{25}, x_{35}$ för villkoren (1), och inför $c_{15} = c_{25} = c_{35} = 0$ och $b_5 = 7(= 11 + 9 + 13 - 6 - 6 - 4 - 10)$.

Då kan (P) skrivas som följande balanserade TP:

$$
\begin{array}{llrcll}
(P) & \min & \multicolumn{4}{l}{\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{5} c_{ij}x_{ij}} \\
 & \text{då} & \sum_{j=1}^{5} x_{ij} & = & a_i, & i=1,2,3 \quad (1) \\
 & & \sum_{i=1}^{3} x_{ij} & = & b_j, & j=1\ldots,5 \quad (2) \\
 & & x_{ij} & \geq & 0 & \text{alla } i \text{ och } j.
\end{array}
$$

som kan representeras av tabellen:

	Kund 1	Kund 2	Kund 3	Kund 4	Kund 5	Tillgång
Lev.1	3	4	6	4	0	11
Lev.2	3	3	3	2	0	9
Lev.3	4	5	5	2	0	13
Efterfr.	6	6	4	10	7	

(b) Man får följande transporttablåer:

x_{ij} (för basvariabler):

6	5^-			$^+$
	1^+	4	4^-	
			6^+	7^-

r_{ij} (för ickebasvariabler):

						u_i
	•	•	2	1	−1	1
	1	•	•	•	0	0
	2	2	2	•	•	0
v_j :	2	3	3	2	0	

x_{15} in i basen och x_{24} ut ur basen:

x_{ij} (för basvariabler):

6	1			4
	5	4		
			10	3

r_{ij} (för ickebasvariabler):

						u_i
	•	•	2	2	•	0
	1	•	•	1	1	−1
	1	1	1	•	•	0
v_j :	3	4	4	2	0	

Alla $r_{ij} \geq 0 \Rightarrow$ aktuell baslösning optimal.

(c) Allmänt: $r_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$ där u_i:na och v_j:na beror av c_{ij}:na för basvariblerna.

x_{21} är ickebasvariabel i optimum, så om c_{21} ändras med δ_{21} så ändras r_{21} med δ_{21} medan övriga r_{ij} ej påverkas!

Kravet på δ_{21} blir då att $r_{21} + \delta_{21} \geq 0$, dvs $\delta_{21} \geq -1$.

(d) x_{22} är basvariabel i optimum, så om c_{22} ändras till $3+\delta$ så påverkar detta u_i:na och v_j:na, och därmed r_{ij}:na, enligt följande:

r_{ij} (för ickebasvariabler):

$$
\begin{array}{r|r|r|r|r|r|r}
\cline{2-6}
 & \bullet & \bullet & 2+\delta & 2 & \bullet & 0 \\
\cline{2-6}
 & 1-\delta & \bullet & \bullet & 1-\delta & 1-\delta & -1+\delta \\
\cline{2-6}
 & 1 & 1 & 1+\delta & \bullet & \bullet & 0 \\
\cline{2-6}
v_j: & 3 & 4 & 4-\delta & 2 & 0 & \\
\end{array}
\quad u_i
$$

Kravet att alla $r_{ij} \geq 0$ medför att $-1 \leq \delta \leq 1$.

2.2 **(a)** Den givna lösningen $\boldsymbol{x}$ är uppenbarligen tillåten till TP. För att utreda om den är optimal beräknar vi reducerade kostnader $r_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$ med hjälp av en resultattablå:

r_{ij}:

							u_i
	1	1	1	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	5
	1	$\bullet$	1	1	$\bullet$	1	6
	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	1	1	1	4
v_j:	2	-2	1	-1	1	0	

$r_{ij} \geq 0$ för alla ickebasvariabler. Därmed är den föreslagna lösningen optimal.

Optimalvärdet $= \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} = 336$.

(b) $$(D) \quad \max \quad \sum_{i=1}^{3} a_i u_i + \sum_{j=1}^{6} b_j v_j$$
$$\text{då} \quad u_i + v_j \leq c_{ij}, \qquad \text{alla } i \text{ och } j.$$

Som bekant utgör simplexmultiplikatorerna i tablån ovan optimal duallösning, dvs $\boldsymbol{u} = (5, 6, 4)^{\mathsf{T}}$ och $\boldsymbol{v} = (2, -2, 1, -1, 1, 0)^{\mathsf{T}}$. Denna lösning är tillåten till (D) (eftersom alla $r_{ij} \geq 0$), och den har målfunktionsvärdet $\sum_{i=1}^{3} a_i u_i + \sum_{j=1}^{6} b_j v_j = 336 = (TP)$:s optimalvärde.

(c) Störning av a_1 och b_1 får följande effekt på baslösningen:

$x_{ij}(\delta)$:

							a_i
	0	0	0	12	$10+\delta$	3	$25+\delta$
	0	$11+\delta$	0	0	$4-\delta$	0	15
	$15+\delta$	$8-\delta$	7	0	0	0	30
b_j:	$15+\delta$	19	7	12	14	3	

Ändringen av optimalvärdet $= (6 - 7 + 4 - 2 + 6)\delta = 7\delta$.

Eftersom c_{ij}:na är desamma, så ändras inte u_i:na och v_j:na och därmed inte duala problemets optimallösning. Däremot ändras duala problemets optimalvärde med $u_1\delta + v_1\delta = 7\delta$.

(d) Om $\delta = 4$ så blir $x_{25} = 0$. Om $\delta = -10$ så blir $x_{15} = 0$.

Dessa är de kritiska gränserna för δ, dvs $-10 < \delta < 4$.

2.3 **(a)** Den givna lösningen är en tillåten baslösning med basvariablerna:

$x_{12} = 2,\ x_{13} = 3,\ x_{24} = 7$ och $x_{45} = 3$.

Nodpriser (simplexmultiplikatorer) bestäms ur att $\lambda_i - \lambda_j = c_{ij}$ för alla basvariabelbågar, samt att $\lambda_5 = 0$.

Då blir: $\lambda_4 = 2,\ \lambda_2 = 6,\ \lambda_1 = 10,\ \lambda_3 = 6.$

Reducerade kostnader $r_{ij} = c_{ij} - \lambda_i + \lambda_j$ för alla ickebasvariabler:

$r_{23} = 2,\ r_{34} = 1,\ r_{35} = 1.$

Alla $r_{ij} \geq 0 \Rightarrow$ Baslösningen optimal.

(b) Om $c_{34} = 3$ så blir istället $r_{34} = -1 < 0$, varför vi vill göra x_{34} till basvariabel.

Om $x_{34} = \theta > 0$ så påverkas övriga basvariabler enligt följande (se i nätverket):

$x_{13} = 3 + \theta,\ x_{12} = 2 - \theta,\ x_{24} = 7 - \theta,\ x_{45} = 3.$

x_{34} kan alltså bli $= 2$. Då blir $x_{12} = 0$.

Ny baslösning: $x_{13} = 5,\ x_{24} = 5,\ x_{34} = 2,\ x_{45} = 3.$

Simplexmultiplikatorer och reducerade kostnader:

$\lambda_5 = 0,\ \lambda_4 = 2,\ \lambda_3 = 5,\ \lambda_1 = 9,\ \lambda_2 = 6.$

$r_{12} = 1,\ r_{23} = 1,\ r_{35} = 2.$

Alla $r_{ij} \geq 0 \Rightarrow$ Nya baslösningen optimal.

2.4 **(a)** Tillåten baslösning med alla $r_{ij} \geq 0$.

(b) $\lambda = (6, 7, 2, 4, 1, 0)^\mathsf{T}$

(c) $x_{14} = 9 + \delta,\ x_{13} = 4 - \delta,\ z = 81 - 2\delta,\ \delta \leq 4.$

2.5 **(a)** Transportalgoritmen ger följande tablåer:

x_{ij} (för basvariabler):

60$^-$	40$^+$			
	20$^-$	60	20$^+$	
$^+$			40$^-$	60

r_{ij} (för ickebasvar.):

					u_i
•	•	2	2	1	3
−1	•	•	•	1	4
−2	0	1	•	•	5
v_j : 0	0	1	−1	0	

Låt x_{31} (som har $r_{31} = -2$) bli ny basvaribel och byt bas.

x_{ij} (för basvariabler):

40$^-$	60			$^+$
		60	40	
20$^+$			20	60$^-$

r_{ij} (för ickebasvar.):

					u_i
•	•	0	0	−1	5
1	2	•	•	1	4
•	2	1	•	•	5
v_j : −2	−2	1	−1	0	

Låt x_{15} (som har $r_{15} = -1$) bli ny basvaribel och byt bas.

x_{ij} (för basvariabler):

	60			40
		60	40	
60			20	20

r_{ij} (för ickebasvar.):

					u_i
1	•	1	1	•	4
1	1	•	•	1	4
•	1	1	•	•	5
v_j : −2	−1	1	−1	0	

Alla $r_{ij} \geq 0 \Rightarrow$ aktuell baslösning optimal, dvs:

Från fabrik nr 1:	60 ton till butik nr 2 och 40 ton till butik nr 5.
Från fabrik nr 2:	60 ton till butik nr 3 och 40 ton till butik nr 4.
Från fabrik nr 3:	60 ton till butik nr 1, 20 ton till butik nr 4 och 20 ton till butik nr 5.

Totala transportkostnaden blir då = 1120.

(b) Duala problemet:

$$(D)\quad \begin{array}{lll} \max & 100(u_1+u_2+u_3)+60(v_1+v_2+v_3+v_4+v_5) & \\ \text{då} & u_i+v_j \leq c_{ij}, & \text{för alla } i \text{ och } j. \end{array}$$

En optimallösning erhålls direkt ur sluttablån ovan, dvs
$u_1=4,\ u_2=4,\ u_3=5,\ v_1=-2,\ v_2=-1,\ v_3=1,\ v_4=-1,\ v_5=0,$
med optimalvärdet $= 100\cdot 13 + 60\cdot(-3) = 1120$, som ovan.

2.6 Transportalgoritmen ger följande tablåer:

x_{ij} (för basvariabler):

1	0^-	$^+$
	1^+	0^-
		1

r_{ij} (för ickebasvar.):

				u_i
	•	•	−2	4
	−1	•	•	5
	0	3	•	5
v_j :	−3	−3	0	

Låt x_{13} (som har $r_{13}=-2$) bli ny basvaribel.

Om x_{13} växer från 0 så blir både x_{12} och x_{23} omedelbart < 0.

Alltså låter vi en av dessa, t.ex x_{23}, lämna basen.

Den nya basvariabeln x_{13} får värdet 0 i den nya baslösningen.

x_{ij} (för basvariabler):

1^-	0	0^+
	1	
$^+$		1^-

r_{ij} (för ickebasvar.):

				u_i
	•	•	•	2
	−1	•	2	3
	−2	1	•	5
v_j :	−1	−1	0	

Låt x_{31} (som har $r_{31}=-2$) bli ny basvaribel.

x_{31} kan växa till värdet 1. Då blir både x_{11} och $x_{33}=0$.

Alltså låter vi en av dessa, t.ex x_{33}, lämna basen.

x_{ij} (för basvariabler):

0^-	0^+	1
$^+$	1^-	
1		

r_{ij} (för ickebasvar.):

				u_i
	•	•	•	2
	−1	•	2	3
	•	3	2	3
v_j :	−1	−1	0	

Låt x_{21} (som har $r_{21}=-1$) bli ny basvaribel.

Om x_{21} växer från 0 så blir x_{11} omedelbart < 0.

Alltså låter vi x_{11} lämna basen.

Den nya basvariabeln x_{21} får värdet 0 i den nya baslösningen.

x_{ij} (för basvariabler):

	0	1
0	1	
1		

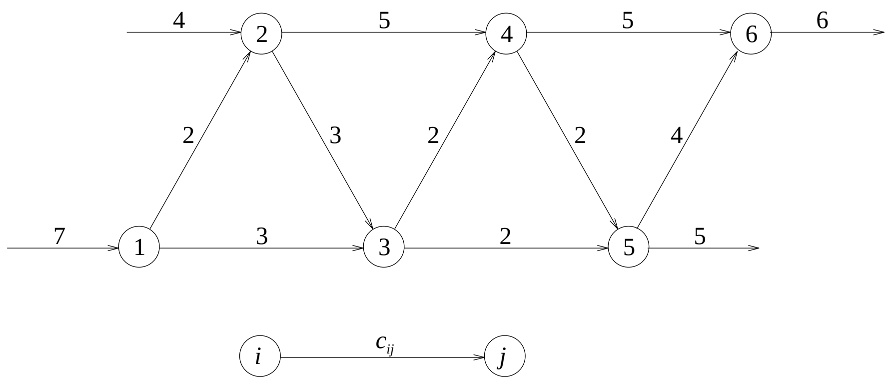
r_{ij} (för ickebasvar.):

				u_i
	1	$\bullet$	$\bullet$	2
	$\bullet$	$\bullet$	2	3
	$\bullet$	2	1	4
v_j :	-2	-1	0	

Nu är $r_{ij} \geq 0$ för alla ickebasvariabler.

Optimal lösning är alltså: $x_{13} = x_{22} = x_{31} = 1$, övriga $x_{ij} = 0$, $z = 6$.

2.7 **(a)** Detta MKFP åskådliggörs genom följande nätverk:



(b) Basvariablernas värden kan nystas upp i exempelvis följande ordning: nod 6 $\Rightarrow x_{46} = 6$, nod 5 $\Rightarrow x_{35} = 5$, nod 2 $\Rightarrow x_{24} = 4$, nod 1 $\Rightarrow x_{13} = 7$, nod 3 (eller nod 4) $\Rightarrow x_{34} = 2$.

Eftersom alla x_{ij} ovan blev > 0 så är baslösningen tillåten.

Målfunktionsvärdet $= \sum c_{ij} x_{ij} = 85$.

(c) Simplexmultiplikatorer (nodpriser) bestäms ur att $\lambda_i - \lambda_j = c_{ij}$ för basvariabelbågarna, samt $\lambda_6 = 0$.

Vi får: $\lambda_6 = 0,\ \lambda_4 = 5,\ \lambda_2 = 10,\ \lambda_3 = 7,\ \lambda_5 = 5,\ \lambda_1 = 10$.

Reducerade kostnader $r_{ij} = c_{ij} - \lambda_i + \lambda_j$ för ickebasvariabler:

$r_{12} = 2,\ r_{23} = 0,\ r_{45} = 2,\ r_{56} = -1 \Rightarrow$ låt x_{56} bli ny basvariabel.

$x_{56} = \theta \Rightarrow x_{35} = 5 + \theta,\ x_{46} = 6 - \theta,\ x_{34} = 2 - \theta \Rightarrow x_{34}$ ska ut ur basen.

Ny baslösning: $x_{13} = x_{35} = 7,\ x_{24} = x_{46} = 4,\ x_{56} = 2$.

Målfunktionsvärdet $= 83$.

Nya λ_i: $\lambda_6 = 0,\ \lambda_5 = 4,\ \lambda_3 = 6,\ \lambda_1 = 9,\ \lambda_4 = 5,\ \lambda_2 = 10$.

Reducerade kostnader $r_{ij} = c_{ij} - \lambda_i + \lambda_j$ för ickebasvariabler:

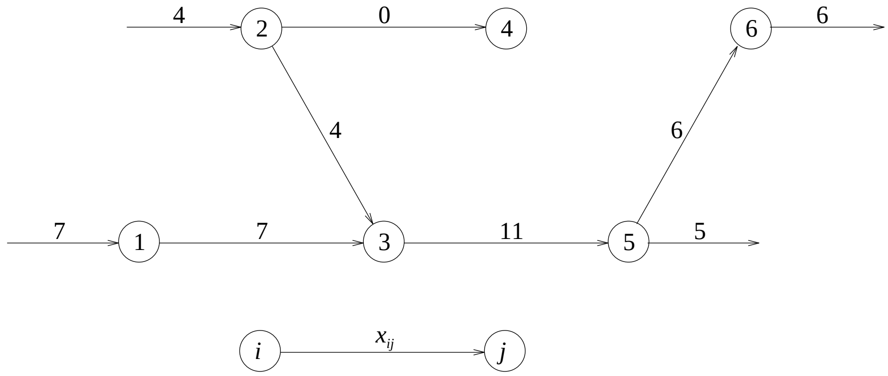
$r_{12} = 1,\ r_{23} = -1,\ r_{34} = 1,\ r_{45} = 1 \Rightarrow$ låt x_{23} bli ny basvariabel.

$x_{23} = \theta \Rightarrow x_{35} = 7 + \theta,\ x_{56} = 2 + \theta,\ x_{46} = 4 - \theta,\ x_{24} = 4 - \theta \Rightarrow x_{46}$ (eller alternativt x_{24}) ska ut ur basen.

Ny baslösning: $x_{13} = 7,\ x_{23} = 4,\ x_{35} = 11,\ x_{56} = 6,\ x_{24} = 4$.

Målfunktionsvärdet $= 79$.

Nya λ_i: $\lambda_6 = 0,\ \lambda_5 = 4,\ \lambda_3 = 6,\ \lambda_1 = 9,\ \lambda_2 = 9,\ \lambda_4 = 4.$
Reducerade kostnader $r_{ij} = c_{ij} - \lambda_i + \lambda_j$ för ickebasvariabler:
$r_{12} = 2,\ r_{34} = 0,\ r_{46} = 1,\ r_{45} = 2.$
Alla $r_{ij} \geq 0 \Rightarrow$ den aktuella baslösningen är optimal.



7. Konvexitet

3.1 **(c)** Take two points a and b in $C+D$. Show that $\lambda a+(1-\lambda)b$ belongs to $C+D$ for all $\lambda \in [0,1]$.

$$
\begin{aligned}
a \in C+D &\Longrightarrow a = x_a + y_a \quad \text{for some } x_a \in C \text{ and } y_a \in D \\
b \in C+D &\Longrightarrow b = x_b + y_b \quad \text{for some } x_b \in C \text{ and } y_b \in D
\end{aligned}
$$

Using the above we get

$$
\begin{aligned}
\lambda a + (1-\lambda)b &= \lambda(x_a+y_a) + (1-\lambda)(x_b+y_b) = \\
&= \lambda x_a + \lambda y_a + (1-\lambda)x_b + (1-\lambda)y_b = \\
&= \lambda x_a + (1-\lambda)x_b + \lambda y_a + (1-\lambda)y_b \in C+D
\end{aligned}
$$

since C and D are convex. This shows that $C+D$ is convex.

3.2 Take two points a and b in $\bigcap_{\alpha\in A} C_\alpha$. Show that $\lambda a+(1-\lambda)b$ belongs to $\bigcap_{\alpha\in A} C_\alpha$ for all $\lambda \in [0,1]$. This is true for if a and b are in $\bigcap_{\alpha\in A} C_\alpha$, then for each $\alpha \in A$ we have $a \in C_\alpha$ and $b \in C_\alpha$. Since C_α is a convex set, $\lambda a+(1-\lambda)b$ belongs to C_α. Since this is true for every $\alpha \in C_\alpha$, we have $\lambda a+(1-\lambda)b$ in $\bigcap_{\alpha\in A} C_\alpha$. This shows that $\bigcap_{\alpha\in A} C_\alpha$ is a convex set.

3.3 **(a)** Let x and y be two points in C. Show that $(f+g)(\lambda y+(1-\lambda)x) \leq \lambda(f+g)(y)(1-\lambda)(f+g)(x)$ for all $\lambda \in [0,1]$.

$$
\begin{aligned}
(f+g)(\lambda y+(1-\lambda)x) &= f(\lambda y+(1-\lambda)x) + g(\lambda y+(1-\lambda)x) \leq \\
\{f \text{ and } g \text{ are convex}\} &\leq \lambda(f(y)+g(y)) + (1-\lambda)(f(x)+g(x)) = \\
&= \lambda(f+g)(y) + (1-\lambda)(f+g)(x)
\end{aligned}
$$

This shows that $f+g$ is convex.

3.4 Let x and y be two points in C. Show that $\sup\limits_{\alpha\in A} f_\alpha(\lambda y+(1-\lambda)x) \leq \lambda \sup\limits_{\alpha\in A} f_\alpha(y) + (1-\lambda)\sup\limits_{\alpha\in A} f_\alpha(x)$ for all $\lambda \in [0,1]$.

$$
\begin{gathered}
\lambda \sup_{\alpha\in A} f_\alpha(y) + (1-\lambda)\sup_{\alpha\in A} f_\alpha(x) \geq \lambda f_\beta(y) + (1-\lambda) f_\beta(x) \geq \\
\{f_\beta,\ \beta\in A \text{ is convex }\} \geq f_\beta(\lambda y+(1-\lambda)x)
\end{gathered}
$$

Since the inequality above holds for all $\beta \in A$ it must hold that

$$
\sup_{\beta\in A} f_\beta(\lambda y+(1-\lambda)x) \leq \lambda \sup_{\alpha\in A} f_\alpha(y) + (1-\lambda)\sup_{\alpha\in A} f_\alpha(x)
$$

This shows that $\sup\limits_{\alpha\in A} f_\alpha$ is convex.

3.5 Let x and y be two points in C, and let $\lambda \in [0,1]$. Since g is convex on C, it follows that

$$g((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)g(x) + \lambda g(y).$$

Hence, since f is a nondecreasing function on I, we have

$$f(g((1-\lambda)x + \lambda y)) \leq f((1-\lambda)g(x) + \lambda g(y)).$$

Finally, since f is a convex function on I, we have

$$f((1-\lambda)g(x) + \lambda g(y)) \leq (1-\lambda)f(g(x)) + \lambda f(g(y)).$$

The required result now follows by combining the last two inequalities.

3.6 **(a)** Convex.

(b) Convex.

(c) Convex.

(d) $f(x) = x_1^2/x_2$, where $x_2 > 0$, is convex if and only if the Hessian matrix $\nabla^2 f(x)$ is positive semidefinite for all $x_2 > 0$, where

$$\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} \frac{2}{x_2} & -\frac{2x_1}{x_2^2} \\ -\frac{2x_1}{x_2^2} & \frac{2x_1^2}{x_2^3} \end{pmatrix}$$

Since both $2/x_2 > 0$ and $(2/x_2)(2x_1^2/x_2^3) - (-2x_1/x_2^2)(-2x_1/x_2^2) = 0 \geq 0$, the Hessian matrix is positive semidefinite, which shows that f is convex for $x_2 > 0$.

(e) Convex.

(f) Convex.

3.7 Since ln is an increasing function which is well-defined for positive arguments, it holds that

$$\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln x_i \leq \ln\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right),$$

for $x_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$.

The proof is by induction. Consider the inequality

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln x_i \leq \ln\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right).$$

for $x_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$. $\ln x$ is a concave function for $x > 0$, and hence the inequality holds for $n = 2$. Now, suppose the inequality holds for $n = k$. We want to show that it holds also for $n = k + 1$.

For some $x_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$, consider the identity

$$\frac{1}{k+1}\sum_{i=1}^{k+1} \ln x_i = \frac{k}{k+1}\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} \ln x_i\right) + \frac{1}{k+1}\ln x_{k+1}.$$

Since the inequality in question is assumed to be valid for $k = n$, it follows that

$$\frac{1}{k+1}\sum_{i=1}^{k+1} \ln x_i \leq \frac{k}{k+1}\ln\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_i\right) + \frac{1}{k+1}\ln x_{k+1}.$$

The concavity of ln now gives

$$\frac{1}{k+1}\sum_{i=1}^{k+1} \ln x_i \leq \ln\left(\frac{k}{k+1}\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_i + \frac{1}{k+1}x_{k+1}\right) = \ln\left(\frac{1}{k+1}\sum_{i=1}^{k+1} x_i\right),$$

as required.

3.8 (a) Let x and y be arbitrary points in C and let $\lambda \in [0, 1]$. Since $x \in C$, there exist $t_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, m$ such that

$$x = \sum_{i=1}^{m} t_i x_i \quad \text{and} \quad \sum_{i=1}^{m} t_i = 1.$$

Similarly, since $y \in C$, there exist $s_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, m$ such that

$$y = \sum_{i=1}^{m} s_i x_i \quad \text{and} \quad \sum_{i=1}^{m} s_i = 1.$$

But then,

$$(1-\lambda)x + \lambda y = (1-\lambda)\sum_{i=1}^{m} t_i x_i + \lambda\sum_{i=1}^{m} s_i x_i = \sum_{i=1}^{m}((1-\lambda)t_i + \lambda s_i)x_i.$$

Hence, if we define $r_i = (1-\lambda)t_i + \lambda s_i$, $i = 1, \ldots, m$, we have

$$(1-\lambda)x + \lambda y = \sum_{i=1}^{m} r_i x_i,$$

and the properties of s_i and t_i give $r_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, m$ and $\sum_{i=1}^{m} r_i = 1$. Consequently, $(1-\lambda)x + \lambda y \in C$, as required.

(b) The proof is by induction.

For $m = 2$, the statement is that if $x_1 \in X$ and $x_2 \in X$, $t_1 \geq 0$, $t_2 \geq 0$ and $t_1 + t_2 = 1$, then $t_1 x_1 + t_2 x_2 \in X$. This is true from the convexity of X.

Suppose that the statement is true for $m = k$, i.e., if $x_1, \ldots, x_k \in X$, $t_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, k$ and $\sum_{i=1}^{k} t_i = 1$, then $\sum_{i=1}^{k} t_i x_i \in X$. We want to show that the statement is true also for $m = k + 1$.

Let $x_1, \ldots, x_{k+1} \in X$, $t_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, k+1$ and $\sum_{i=1}^{k+1} t_i = 1$. We want to show that $\sum_{i=1}^{k+1} t_i x_i \in X$. If $t_{k+1} = 1$, then we must have $t_i = 0$,

$i = 1, \ldots, k$ and the statement is true since $\sum_{i=1}^{k+1} t_i x_i = x_{k+1} \in X$. Now consider the case when $t_{k+1} < 1$. Then,

$$\sum_{i=1}^{k+1} t_i x_i = \sum_{i=1}^{k} t_i x_i + t_{k+1} x_{k+1} = (1 - t_{k+1}) \sum_{i=1}^{k} \frac{t_i}{1 - t_{k+1}} x_i + t_{k+1} x_{k+1}.$$

Since $t_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, k+1$ and $\sum_{i=1}^{k+1} t_i = 1$, it follows that

$$\frac{t_i}{1 - t_{k+1}} \geq 0, \ \ i = 1, \ldots k \quad \text{and} \quad \sum_{i=1}^{k} \frac{t_i}{1 - t_{k+1}} = 1.$$

Hence, since it is assumed that the statement is true for $m = k$, it holds that

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{t_i}{1 - t_{k+1}} x_i \in X.$$

But then, since $t_{k+1} \in [0, 1]$, the convexity of X ensures that

$$\sum_{i=1}^{k+1} t_i x_i = (1 - t_{k+1}) \sum_{i=1}^{k} \frac{t_i}{1 - t_{k+1}} x_i + t_{k+1} x_{k+1} \in X,$$

and the induction proof is complete.

8. Ickelinjär optimering

4.1 **(a)** Utveckla:

$$S(a,b) = 5a^2 + (\sum_i t_i^4)b^2 + (2\sum_i t_i^2)ab - (2\sum_i y_i)a -$$
$$- (2\sum_i y_i t_i^2)b + \sum_i y_i^2 = (\text{sätt in siffrorna}) =$$
$$= 5a^2 + 34b^2 + 20ab - 44a - 118b + 114.$$

Nödvändigt för minimum är att $\nabla S(a,b) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ekvationssystemet: $\begin{cases} 10a + 20b - 44 & = 0 \\ 20a + 68b - 118a & = 0 \end{cases}$

med lösningen: $a = \frac{158}{70}$ och $b = \frac{75}{70}$.

(b) Bilda andraderivatsmatrisen $\nabla^2 S(a,b) = \begin{pmatrix} 10 & 20 \\ 20 & 68 \end{pmatrix}$.

Eftersom denna är positivt definit ($10 > 0,\ 68 > 0$ och $10 \cdot 68 - 20 \cdot 20 > 0$) så är den kvadratiska funktionen $S(a,b)$ strikt konvex, varför lösningen ovan är ett globalt minimum.

4.2 **(a)** Problemet kan formuleras: minimera $f(x,y)$, $x, y \in I\!R$, där

$$f(x,y) = \sum_{i=1}^{8} ((x - x_i)^2 + (y - y_i)^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Gradienten, $\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$, där:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \sum_{i=1}^{8} \frac{x - x_i}{((x - x_i)^2 + (y - y_i)^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \sum_{i=1}^{8} \frac{y - y_i}{((x - x_i)^2 + (y - y_i)^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Vi ser att gradienten existerar om och endast om $(x,y) \neq (x_i, y_i)$ för alla $i = 1, \ldots, 8$.

(b) Problemet kan formuleras: minimera $p(x,y)$, $x, y \in I\!R$, där

$$p(x,y) = \sum_{i=1}^{8} ((x - x_i)^2 + (y - y_i)^2) =$$
$$= 8x^2 + 8y^2 - 2(\sum_i x_i)x - 2(\sum_i y_i)y + \sum_i x_i^2 + \sum_i y_i^2,$$

som är en kvadratisk funktion i x och y.

Gradienten till p är $\nabla p(x,y) = (16x - 2\sum_i x_i,\ 16y - 2\sum_i y_i)$.

Hessianen till p är $\nabla^2 p(x,y) = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$,

som är positivt definit ($16 > 0,\ 16 > 0,\ 16 \cdot 16 - 0 \cdot 0 > 0$).

Därmed är $p(x, y)$ en strikt konvex kvadratisk funktion som minimeras av lösningen till ekvationssystemet: $\nabla p(x, y) = (0, 0)$,

dvs ekvationssystemet: $\begin{cases} 16x - 2\sum x_i = 0 \\ 16y - 2\sum y_i = 0 \end{cases}$

Detta system har lösningen: $\begin{cases} x = \frac{1}{8}\sum x_i, \\ y = \frac{1}{8}\sum y_i. \end{cases}$

P ska alltså placeras i tyngdpunktenför de 8 punkterna P_i .

4.3 **(a)**
$$p(\boldsymbol{x}) = 3x_1^2 + 6x_2^2 + 4x_1x_2 - 2x_1 - 4x_2 + 1 = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^\mathsf{T}\boldsymbol{H}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}^\mathsf{T}\boldsymbol{x} + c_0,$$

$$\text{där } \boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 12 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix},\ c_0 = 1.$$

$\boldsymbol{H}$ är positivt definit, ty $6 > 0,\ 12 > 0$ och $6 \cdot 12 - 4 \cdot 4 > 0$.
Alltså erhålls ett globalt minimum till $p(\boldsymbol{x})$ ur ekv.systemet:
$\nabla p(\boldsymbol{x}) = 0$, dvs $\boldsymbol{H}\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{c}$, med lösningen $\bar{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}^\mathsf{T}$.
Detta är ett globalt minimum pga att den kvadratiska funktionen $p(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^\mathsf{T}\boldsymbol{H}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}^\mathsf{T}\boldsymbol{x} + c_0$ är konvex då $\boldsymbol{H}$ är positivt definit.

(b)
$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^\mathsf{T}\boldsymbol{H}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}^\mathsf{T}\boldsymbol{x} + c_0 + \frac{7}{3}x_1^3 = p(\boldsymbol{x}) + \frac{7}{3}x_1^3.$$

$$\nabla f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{H}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c} + \begin{pmatrix} 7x_1^2 & 0 \end{pmatrix}^\mathsf{T},\quad \nabla^2 f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{H} + \begin{pmatrix} 14x_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Newtonsteget $\boldsymbol{d}^{(k)}$ bestäms ur ekv.systemet $\nabla^2 f(\boldsymbol{x}^{(k)})\boldsymbol{d} = -\nabla f(\boldsymbol{x}^{(k)})$.

$\boldsymbol{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}^\mathsf{T} \Rightarrow \nabla^2 f(\boldsymbol{x}^{(0)}) = \boldsymbol{H}$ och $\nabla f(\boldsymbol{x}^{(0)}) = \boldsymbol{c} \Rightarrow \boldsymbol{H}\boldsymbol{d} = -\boldsymbol{c} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}^\mathsf{T} \Rightarrow \boldsymbol{x}^{(1)} = \boldsymbol{x}^{(0)} + \boldsymbol{d}^{(0)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}^\mathsf{T}$.

$\boldsymbol{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}^\mathsf{T} \Rightarrow \nabla^2 f(\boldsymbol{x}^{(1)}) = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}$ och $\nabla f(\boldsymbol{x}^{(1)}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ekv.systemet: $\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}\boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{7} \\ 0 \end{pmatrix}$

med lösningen: $\boldsymbol{d}^{(1)} = \begin{pmatrix} -3/140 \\ 1/140 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boldsymbol{x}^{(2)} = \boldsymbol{x}^{(1)} + \boldsymbol{d}^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{17}{140} & \frac{41}{140} \end{pmatrix}^\mathsf{T}.$$

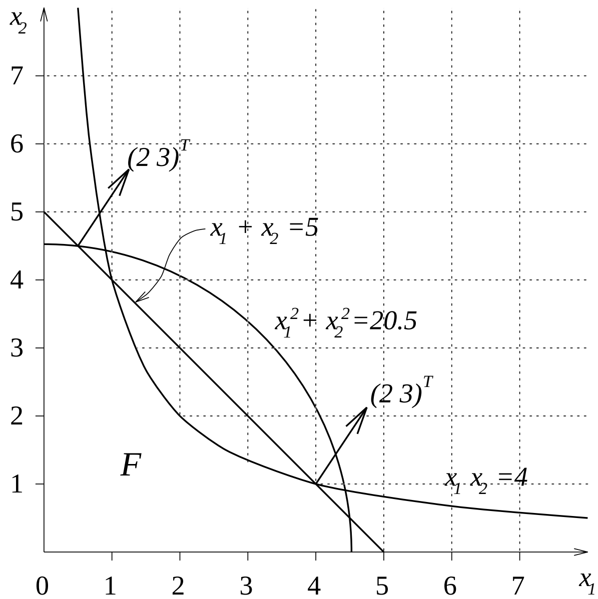
4.4 Tillåtna området = alla punkter i (x_1, x_2)-planet som ligger i området F i figuren nedan.

Nivåkurvorna till målfunktionen är vinkelräta mot vektorn $\begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}^\mathsf{T}$.

Grafisk optimering ger att det finns två lokala maxima:

Det ena i skärningspunkten mellan $x_1x_2 = 4$ och $x_1 + x_2 = 5 \Rightarrow$
$\Rightarrow x_1 = 4, x_2 = 1$ och målfunktionsvärdet $= 11$,

det andra i skärningspunkten mellan $x_1^2 + x_2^2 = 20.5$ och $x_1 + x_2 = 5 \Rightarrow$
$\Rightarrow x_1 = 0.5, x_2 = 4.5$ och målfunktionsvärdet $= 14.5$.



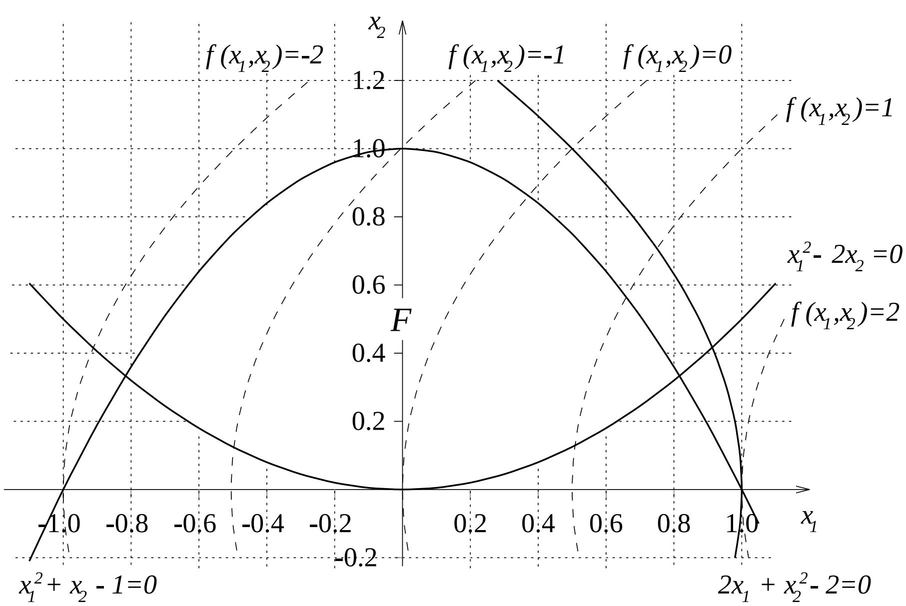
F=Tillåtna området

4.5 Tillåtna området = alla punkter i (x_1, x_2)-planet som ligger i området F i figuren nedan.

Några nivåkurvor till målfunktionen är också utritade (streckade).

Grafisk optimering ger att optimallösningen till problemet är skärningspunkten mellan kurvorna $g_1(\boldsymbol{x}) = x_1^2 - 2x_2 = 0$ och $g_3(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + x_2 - 1 = 0$,

dvs $x_1 = (\frac{2}{3})^{\frac{1}{2}}$ och $x_2 = \frac{1}{3}$.



F=Tillåtna området

4.6 **(a)** Ett nödvändigt villkor för att $\bar{\boldsymbol{x}}$ ska kunna vara ett lokalt maximum till $f(\boldsymbol{x})$ är att $\nabla f(\boldsymbol{x}) = 0$. Derivering ger att:

$$\nabla f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 6x_1^2 + x_2^2 - 12x_1 & 2x_1x_2 - 2x_2 \end{pmatrix}^\mathsf{T}.$$

Insättning ger att tre av de fyra punkterna uppfyller $\nabla f(\boldsymbol{x}) = 0$, nämligen $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}^\mathsf{T}$, $\begin{pmatrix} 2 & 0 \end{pmatrix}^\mathsf{T}$ och $\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{6} \end{pmatrix}^\mathsf{T}$. Punkten $\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}^\mathsf{T}$ kan alltså inte vara ett lokalt maximum till $f(\boldsymbol{x})$.

För att gå vidare beräknar vi $\nabla^2 f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 12x_1 - 12 & 2x_2 \\ 2x_2 & 2x_1 - 2 \end{pmatrix}$.

Det är välkänt att om $\nabla^2 f(\boldsymbol{x})$ är negativt definit (och $\nabla f(\boldsymbol{x}) = 0$) så är $\boldsymbol{x}$ ett lokalt maximum till $f(\boldsymbol{x})$. Å andra sidan, om $\nabla^2 f(\boldsymbol{x})$ inte är negativt semidefinit så är $\boldsymbol{x}$ inte ett lokalt maximum.

Insättning ger att $\nabla^2 f(\boldsymbol{x})$ är negativt definit för $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$, medan $\nabla^2 f(\boldsymbol{x})$ inte är negativt semidefinit för de övriga båda, dvs för $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \end{pmatrix}^\mathsf{T}$ och $\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{6} \end{pmatrix}^\mathsf{T}$. Alltså är $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}^\mathsf{T}$ den enda av de fyra punkterna som är ett lokalt maximum till $f(\boldsymbol{x})$.

(b) Punkter som inte är lokala maxpunkter kan inte heller vara globala maxpunkter. Enda kandidaten bland de fyra är alltså $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}^\mathsf{T}$.

Men $f(0,0) = 0$ och (t.ex) $f(10,10) = 2300$, så $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}^\mathsf{T}$ är inte en global maxpunkt.

SVAR: Ingen av de fyra punkterna är en global maxpunkt.

4.7 Deriveringar ger följande gradienter och andraderivatsmatriser:

$$\nabla f_1(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 6 - 10x_1 + 4x_2 \\ -2 + 4x_1 - 2x_2 \end{pmatrix}, \quad \nabla^2 f_1(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} -10 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$\nabla f_2(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 22 - 16x_1 - 6x_2 \\ 8 - 6x_1 - 2x_2 \end{pmatrix}, \quad \nabla^2 f_2(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} -16 & -6 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$\nabla f_3(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 70 - 72x_1 \\ 130 - 128x_2 \end{pmatrix}, \quad \nabla^2 f_3(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} -72 & 0 \\ 0 & -128 \end{pmatrix}.$$

Låt $\bar{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}^\mathsf{T}$. Då gäller:

$\nabla f_1(\bar{\boldsymbol{x}}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}^\mathsf{T}$, $\nabla f_2(\bar{\boldsymbol{x}}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}^\mathsf{T}$, $\nabla f_3(\bar{\boldsymbol{x}}) = (-2, 2)^\mathsf{T} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}^\mathsf{T}$

Därmed kan $\bar{\boldsymbol{x}}$ ej vara en lokal maxpunkt till $f_3(\boldsymbol{x})$.

En ascentriktning till $f_3(\boldsymbol{x})$ i $\bar{\boldsymbol{x}}$ är (t.ex) gradienten, dvs $\boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \end{pmatrix}^\mathsf{T}$.

Betrakta nu $-\nabla^2 f_1(\bar{\boldsymbol{x}}) = \begin{pmatrix} 10 & -4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$.

Eftersom $10 > 0,\ 2 > 0$ och $10 \cdot 2 - (-4) \cdot (-4) > 0$ så är $-\nabla^2 f_1(\bar{\boldsymbol{x}})$ positivt definit, och därmed är $\nabla^2 f_1(\bar{\boldsymbol{x}})$ negativt definit, och därmed är $\bar{\boldsymbol{x}}$ ett lokalt maximum till $f_1(\boldsymbol{x})$.

Betrakta nu $-\nabla^2 f_2(\bar{\boldsymbol{x}}) = \begin{pmatrix} 16 & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$.

Eftersom $16 \cdot 2 - 6 \cdot 6 < 0$ så är $-\nabla^2 f_2(\bar{\boldsymbol{x}})$ varken positivt eller negativt definit, utan istället indefinit. $\bar{\boldsymbol{x}}$ är därmed en sadelpunkt till $f_2(\boldsymbol{x})$.

Taylorutveckling ger:

$f_2(\bar{\boldsymbol{x}} + \alpha \boldsymbol{d}) = f_2(\bar{\boldsymbol{x}}) + \alpha \nabla f_2(\bar{\boldsymbol{x}})^\mathsf{T} \boldsymbol{d} + \frac{\alpha^2}{2} \boldsymbol{d}^\mathsf{T} \nabla^2 f_2(\bar{\boldsymbol{x}}) \boldsymbol{d} + o(\alpha^2)$, dvs

$f_2(\bar{\boldsymbol{x}} + \alpha \boldsymbol{d}) - f_2(\bar{\boldsymbol{x}}) \approx \frac{\alpha^2}{2} \boldsymbol{d}^\mathsf{T} \nabla^2 f_2(\bar{\boldsymbol{x}}) \boldsymbol{d}$ för små α (ty $\nabla f_2(\bar{\boldsymbol{x}}) = 0$).

$\boldsymbol{d}$ är därför en ascentriktning till $f_2(\boldsymbol{x})$ i $\bar{\boldsymbol{x}}$ om $\frac{1}{2} \boldsymbol{d}^\mathsf{T} \nabla^2 f_2(\bar{\boldsymbol{x}}) \boldsymbol{d} > 0$,

dvs om $(d_1, d_2) \begin{pmatrix} -8 & -3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = -8d_1^2 - 6d_1 d_2 - d_2^2 > 0$.

Kvadratkomplettering ger:

$-8d_1^2 - 6d_1 d_2 - d_2^2 = -((d_2 + 3d_1)^2 - d_1^2)$ som är > 0

om exempelvis $\boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \end{pmatrix}^\mathsf{T}$.

4.8 **(a)**

$$\begin{array}{rrcl} \min & f(x,y,z) & = & -xyz \\ \text{då} & h(x,y,z) & = & x^2 + y^2 + z^2 - 14400 \;=\; 0 \\ & x,\ y,\ z & \geq & 0 \end{array}$$

(b) $\nabla f + \lambda \cdot \nabla h = \begin{pmatrix} -yz & -zx & -xy \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \end{pmatrix} =$

$=$ (sätt in den föreslagna lösningen $x = y = z = \sqrt{4800}$) $=$

$= 4800 \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} + \sqrt{4800}\lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

om $\lambda = \sqrt{1200}$.

4.9 **(a)**

$$\begin{array}{lll} (P_1) & \min & 2C_1 x_L x_B + 2C_2 x_B x_H + 2C_2 x_H x_L \\ & \text{då} & x_L x_B x_H = 1 \end{array}$$

(samt $x_L,\ x_B,\ x_H \geq 0$ som vi enligt uppgiften ej behöver behandla)

(b) Första ordningens optimalitetsvillkor för (P_1):

$$\begin{array}{lcl} 2C_1 x_B + 2C_2 x_H - \lambda x_B x_H & = & 0 \\ 2C_1 x_L + 2C_2 x_H - \lambda x_L x_H & = & 0 \\ 2C_2 x_B + 2C_2 x_H - \lambda x_L x_B & = & 0 \\ 1 - x_L x_B x_H & = & 0 \end{array}$$

(c) $x_H = \frac{1}{x_B x_L} \Rightarrow$

$$(P_2) \quad \min \quad F(x_L, x_B) = 2C_1 x_L x_B + 2\frac{C_2}{x_B} + 2\frac{C_2}{x_L}$$

Första ordningens optimalitetsvillkor för (P_2):

$$\frac{\partial F}{\partial x_L} = 2C_1 x_B - \frac{2C_2}{x_L^2} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_B} = 2C_1 x_L - \frac{2C_2}{x_B^2} = 0$$

Detta ickelinjära ekvationssystem kan lösas analytiskt $\Rightarrow$

$\Rightarrow \hat{x}_L = \hat{x}_B = (\frac{C_2}{C_1})^{\frac{1}{3}}$ och därmed $\hat{x}_H = (\frac{C_1}{C_2})^{\frac{2}{3}}$.

4.10 **(a)** Låt $\boldsymbol{D}$ vara en diagonalmatris med diagonalelementen r_{ij}, och låt matrisen $\boldsymbol{A}$ och vektorn $\boldsymbol{p}$ vara sådana att bivillkoren i (QP) kan skrivas på formen: $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{p}$.

Detta kan åstadkommes (jämför TP) genom att låta:

$\boldsymbol{x} = (x_{11}, x_{12}, \dots, x_{mn})^\mathsf{T}$, $\boldsymbol{p} = (-a_1, \dots, b_{n-1})^\mathsf{T}$ och

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 \; \dots \; -1 & 0 \; \dots \; 0 \\ \ddots & \ddots \\ 0 \; \dots \; 0 & -1 \; \dots \; -1 \\ 1 \; 0 \dots 0 & \dots 1 \; 0 \dots 0 \\ \ddots & \ddots \\ 0 \dots 0 \; 1 \; 0 & \dots \dots 0 \; 1 \; 0 \end{pmatrix}$$

där vi strukit sista balansekvationen på välkänt TP-sätt.

$\boldsymbol{A}$ är alltså en $(m+n-1) \times (mn)$-matris med linjärt oberoende rader.

(QP) kan nu skrivas: min $\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^\mathsf{T}\boldsymbol{D}\boldsymbol{x}$ då $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{p}$.

Eftersom $\boldsymbol{D}$ är positivt definit så är detta problem ekvivalent med följande linjära ekvationssystem: $\begin{cases} \boldsymbol{Dx} + \boldsymbol{A}^\mathsf{T}\boldsymbol{w} & = \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{Ax} & = \boldsymbol{p} \end{cases}$

Här kan $\boldsymbol{x}$ enkelt lösas ut (eftersom $\boldsymbol{D}$ är diagonal) varvid:

$\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{A}^\mathsf{T}\boldsymbol{w}$ och $-\boldsymbol{A}\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{A}^\mathsf{T}\boldsymbol{w} = \boldsymbol{p}$ Detta är vårt sökta ekv.system!

$\boldsymbol{D}$ pos.def. och $\boldsymbol{A}$ linj.ober.rader $\Rightarrow$ $\boldsymbol{A}\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{A}^\mathsf{T}$ ickesingulär (enkel övn.)

Alltså har ekvationssystemet en entydig lösning $\boldsymbol{w}^*$, varpå optimallösningen till (QP) ges av $\boldsymbol{x}^* = -\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{A}^\mathsf{T}\boldsymbol{w}^*$.

Låt $\boldsymbol{w} = (u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_{n-1})^\mathsf{T}$ och $q_{ij} = \frac{1}{r_{ij}}$.

Då erhålls: $\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{A}^\mathsf{T}\boldsymbol{w} \Leftrightarrow x_{ij} = q_{ij}(u_i - v_j)$ (Ohms lag!) för alla i och j, förutsatt att man sätter $v_n = 0$.

Vidare kan då ekvationssystemet $-\boldsymbol{A}\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{A}^\mathsf{T}\boldsymbol{w} = \boldsymbol{p}$ skrivas på formen:

$$\begin{cases} \alpha_i u_i + \sum_{j=1}^{n-1}(-q_{ij})v_j & = \; a_i, \quad i = 1, \dots, m \\ \sum_{i=1}^{m}(-q_{ij})u_i + \beta_j v_j & = \; -b_j, \quad j = 1, \dots, n-1 \end{cases}$$

där $\alpha_i = \sum_{j=1}^{n} q_{ij}$ och $\beta_j = \sum_{i=1}^{m} q_{ij}$.

(b) Speciellt om alla $r_{ij} = 1$ så blir ekvationssystemet ovan:

$$\begin{cases} n \cdot u_i - \sum_{j=1}^{n-1} v_j & = \; a_i, \quad i = 1, \dots, m \\ -\sum_{i=1}^{m} u_i + \beta_j v_j & = \; -b_j, \quad j = 1, \dots, n-1 \end{cases}$$

medan $x_{ij} = u_i - v_j$ (där $v_n = 0$).

Om nu $x_{ij} = \frac{1}{n} \cdot a_i + \frac{1}{m} \cdot b_j - \frac{1}{mn} \cdot S$ (som föreslaget är) så ger identifikation (först för $j = n$) att:

$$\begin{cases} u_i = \frac{1}{n} \cdot a_i + \frac{1}{m} \cdot b_n - \frac{1}{mn} \cdot S & i = 1, \dots, m \\ v_j = \frac{1}{m}(b_n - b_j) & j = 1, \dots, n-1 \end{cases}$$

Insättning visar att dessa u_i och v_j löser ekvationssystemet ovan.

Slutligen ett litet exempel:

Låt: $m = n = 2,\ a_1 = 10,\ a_2 = 2,\ b_1 = 2,\ b_2 = 10$, alla $r_{ij} = 1$.

Då blir: $u_1 = 7,\ u_2 = 3,\ v_1 = 4,\ v_2 = 0$,

$x_{11} = 3,\ x_{12} = 7,\ x_{21} = -1,\ x_{22} = 3$.

4.11 **(a)** Vårt studerade problem (QP) kan skrivas:

$$(QP)\quad \begin{array}{ll} \min & \frac{1}{2}\cdot \boldsymbol{x}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{I}\boldsymbol{x} \\ \text{då} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b} \end{array} \qquad (\boldsymbol{I}=7\times 7 \text{ enhetsmatris})$$

Optimalitetsvillkoren för (QP) blir då: $\begin{cases} \boldsymbol{I}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{u} &= \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{b} \end{cases}$ som är ett linjärt ekvationssystem i $\boldsymbol{x}$ och $\boldsymbol{u}$.

$\boldsymbol{I}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{x}=-\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{u} \Rightarrow$ (sätt in i $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$) $\Rightarrow \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{u}=-\boldsymbol{b}$,

där: $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ och $-\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$\boldsymbol{A}$:s rader linjärt oberoende $\Rightarrow \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}$ positivt definit $\Rightarrow$ existerar en unik lösning $\boldsymbol{u}$ till systemet $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{u}=-\boldsymbol{b}$

Insättning visar att det föreslagna $\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix} 1.4 & 0.8 & 0.4 & 1.0 & 0.6 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}$ är denna (unika) lösning till $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{u}=-\boldsymbol{b}$.

Optimalt $\boldsymbol{x}$ erhålls ur $\boldsymbol{x}=-\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{u}$, dvs

$x_1=u_1-u_2=0.6,\ x_2=u_2-u_3=0.4,\ x_3=u_1-u_4=0.4,$

$x_4=u_2-u_5=0.2,\ x_5=u_3=0.4,\ x_6=u_4-u_5=0.4,\ x_7=u_5=0.6,$

dvs $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 & 0.4 & 0.2 & 0.4 & 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}$.

u_i:na kan tolkas som spänningarna (i Volt) i de olika noderna då nod 6 ”jordats”(dvs $u_6=0$).

(b) Sätt $\bar{\boldsymbol{x}}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}$.

Insättning visar att $\boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{b}$ (all ström genom länkarna 1, 4, 7). Nollrummet till $\boldsymbol{A}$ har dimensionen $7-5=2$.

De två kolumnerna $\boldsymbol{z}^1$ och $\boldsymbol{z}^2$ i den givna matrisen $\boldsymbol{Z}$ är uppenbart linjärt oberoende. Insättning visar att $\boldsymbol{A}\boldsymbol{z}^1=\boldsymbol{0}$ och $\boldsymbol{A}\boldsymbol{z}^2=\boldsymbol{0}$.

Alltså utgör $\boldsymbol{z}^1$ och $\boldsymbol{z}^2$ en bas i nollrummet till $\boldsymbol{A}$.

Då gäller att $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ om och endast om $\boldsymbol{x}=\bar{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{Z}\boldsymbol{v}$ för något $\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^2$.

(QP) kan alltså skrivas:

$$\begin{array}{ll} \min & \frac{1}{2}\cdot(\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{Z}\boldsymbol{v})^{\mathsf{T}}(\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{Z}\boldsymbol{v})=\frac{1}{2}\cdot\boldsymbol{v}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{Z}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{Z}^{\mathsf{T}}\bar{\boldsymbol{x}}+\frac{1}{2}\cdot\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathsf{T}}\bar{\boldsymbol{x}} \\ \text{då} & \boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^2. \end{array}$$

Optimalt $\boldsymbol{v}$ erhålls ur ekvationssystemet $\boldsymbol{Z}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{v}=-\boldsymbol{Z}^{\mathsf{T}}\bar{\boldsymbol{x}}$, där:

$\boldsymbol{Z}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{Z}=\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ och $-\boldsymbol{Z}^{\mathsf{T}}\bar{\boldsymbol{x}}=\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$ optimal $\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix} -0.4 \\ 0.4 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ optimalt $\boldsymbol{x}=$

$=\begin{pmatrix} 1-0.4 & 0+0.4 & 0+0.4 & 1-0.4-0.4 & 0+0.4 & 0+0.4 & 1-0.4 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}=$

$=\begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 & 0.4 & 0.2 & 0.4 & 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}$ som i (a)-uppgiften.

4.12 **(a)** Let

$$\begin{aligned} f(x) &= -2x_1^2 + 12x_1x_2 + 7x_2^2 - 8x_1 - 26x_2, \\ g_1(x) &= x_1 + 2x_2 - 6, \\ g_2(x) &= -x_1, \\ g_3(x) &= x_1 - 3, \\ g_4(x) &= -x_2, \end{aligned}$$

so that the problem is on standard form

$$(P) \quad \begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{s.t.} & g_i(x) \le 0, \quad i = 1, \dots, 4, \\ & x \in I\!R^2. \end{array}$$

Differentiation gives

$$\nabla f(x)^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} -4x_1 + 12x_2 - 8 \\ 12x_1 + 14x_2 - 26 \end{pmatrix}, \ \nabla g_1(x)^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \nabla g_2(x)^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\nabla g_3(x)^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \nabla g_4(x)^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

We may now try all combinations of active constraints to find all KT points. The following three combinations of active constraints give the KT points. With no active constraints we get

$$\begin{aligned} -4x_1 + 12x_2 - 8 &= 0, \\ 12x_1 + 14x_2 - 26 &= 0, \end{aligned}$$

yielding the KT point $x^1 = (1\ 1)^{\mathsf{T}}$ with $\lambda^1 = (0\ 0\ 0\ 0)^{\mathsf{T}}$. With constraint 2 active we get

$$\begin{aligned} -4x_1 + 12x_2 - 8 - \lambda_2 &= 0, \\ 12x_1 + 14x_2 - 26 &= 0, \\ -x_1 &= 0, \end{aligned}$$

yielding the KT point $x^2 = (0\ 13/7)^{\mathsf{T}}$ with $\lambda^2 = (0\ 100/7\ 0\ 0)^{\mathsf{T}}$. With constraints 3 and 4 active we get

$$\begin{aligned} -4x_1 + 12x_2 - 8 + \lambda_3 &= 0, \\ 12x_1 + 14x_2 - 26 - \lambda_4 &= 0, \\ x_1 - 3 &= 0, \\ -x_2 &= 0, \end{aligned}$$

yielding a KT point $x^3 = (3\ 0)^{\mathsf{T}}$ with $\lambda^3 = (0\ 0\ 20\ 10)^{\mathsf{T}}$.

(b) Since we are minimizing a continuous function over a closed and bounded set, a global minimizer exists. In addition, linear constraints is a constraint qualification, implying that all local minimizers must satisfy the KT conditions. The global minimizer is thus obtained as the KT point with the minimum objective function value. We have $f(x^1) = -17$, $f(x^2) = -24\frac{1}{7}$, $f(x^3) = -42$, and hence conclude that $x^3 = (3\ 0)^\mathsf{T}$ is the global minimizer.