Lösningar till 5B1762 Optimeringslära för T, 28/8-07

Uppgift 1.(a)

Först använder vi Gauss–Jordans metod på den givna matrisen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 7 \end{bmatrix}.$$

Addition av -1 gånger första raden till andra raden och -1 gånger första raden till tredje raden, ger till resultat matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Addition av -1 gånger andra raden till första raden och -2 gånger andra raden till tredje raden, ger till resultat matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Nu är $\mathbf{A}$ överförd till trappstegsform med *två trappstegsettor*, $\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

En bas till $\mathcal{R}(\mathbf{A})$ erhålls genom att som basvektorer välja de kolonner i $\mathbf{A}$ som svarar mot trappstegsettor i $\mathbf{U}$, dvs kolonnerna 1 och 2 i $\mathbf{A}$.

De två vektorerna $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ utgör alltså en bas till $\mathcal{R}(\mathbf{A})$

En bas till $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ kan bestämmas enligt följande:
Sätt först $x_3 = 1$ och $x_4 = 0$ och bestäm x_1 och x_2 så att $\mathbf{Ux} = \mathbf{0}$.
Sätt sedan $x_3 = 0$ och $x_4 = 1$ och bestäm x_1 och x_2 så att $\mathbf{Ux} = \mathbf{0}$.

Det ger de bägge basvektorerna $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ till $\mathcal{N}(\mathbf{A})$.

Nu använder vi Gauss–Jordans metod på matrisen

$$\mathbf{A}^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}.$$

Addition av -1 gånger första raden till andra raden, -2 gånger första raden till tredje raden och -3 gånger första raden till fjärde raden, ger till resultat matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Addition av -1 gånger andra raden till första raden, -1 gånger andra raden till tredje raden och -2 gånger andra raden till fjärde raden, ger till resultat matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Nu är $\mathbf{A}^\mathsf{T}$ överförd till trappstegsform med *två trappstegsettor*, $\tilde{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.
En bas till $\mathcal{R}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$ erhålls genom att som basvektorer välja de kolonner i $\mathbf{A}^\mathsf{T}$ som svarar mot trappstegsettor i $\tilde{\mathbf{U}}$, dvs kolonnerna 1 och 2 i $\mathbf{A}^\mathsf{T}$.

De två vektorerna $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ utgör alltså en bas till $\mathcal{R}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$

En bas till $\mathcal{N}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$ kan bestämmas enligt följande:
Sätt $y_3 = 1$ (den enda variabel som inte svarar mot en trappstegsetta)
och bestäm sedan y_1 och y_2 (variablerna svarande mot trappstegsettor)
så att $\tilde{\mathbf{U}}\mathbf{y} = \mathbf{0}$. Det ger den första och enda basvektorn $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ till $\mathcal{N}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$.

Uppgift 1.(b)

Låt:

X_A = antal hektoliter Äppelmust som produceras per vecka.
X_P = antal hektoliter Päronmust som produceras per vecka.
X_B = antal hektoliter Blandmust som produceras per vecka.
X_C = antal hektoliter Cidermust som produceras per vecka.

Vi får då problemformuleringen

$$\begin{array}{rl} \text{maximera} & 196X_A + 210X_P + 280X_B + 442X_C \\ \text{då} & 1.6X_A + 1.8X_P + 3.2X_B + 5.4X_C \leq 80 \\ & 1.2X_A + 1.2X_P + 1.2X_B + 1.8X_C \leq 40 \\ & -0.8X_A + 0.2X_P + 0.2X_B + 0.2X_C \leq 0 \\ & -0.3X_A + 0.7X_P - 0.3X_B - 0.3X_C \leq 0 \\ & X_A \geq 0,\ X_P \geq 0,\ X_B \geq 0,\ X_C \geq 0. \end{array}$$

Uppgift 2.(a)

Vi har ett LP-problem på standardformen

$$\begin{aligned} \text{minimera} \quad & \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} \\ \text{då} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\,, \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\,, \end{aligned}$$

där $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 9 & 7 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 18 \end{pmatrix}$ och $\mathbf{c}^\mathsf{T} = (3,\ 2,\ 4,\ 6)$.

Eftersom $\mathbf{A}$ bara har en rad, så innehåller varje baslösning enbart en basvariabel. Enligt uppgiftslydelsen ska vi starta med $x_1 = 3 > 0$, vilket betyder att det är x_1 som är basvariabeln i startlösningen. Vi har alltså att $\beta = (\,1\,)$ och $\delta = (2, 3, 4)$.

Motsvarande "basmatris" ges av $\mathbf{A}_\beta = \begin{bmatrix} 6 \end{bmatrix}$, medan $\mathbf{A}_\delta = \begin{bmatrix} 3 & 9 & 7 \end{bmatrix}$.

Basvariabelns värde i baslösningen ges av $\mathbf{x}_\beta = \bar{\mathbf{b}}$, där "vektorn" $\bar{\mathbf{b}}$ beräknas ur systemet $\mathbf{A}_\beta \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{b}$, dvs $\begin{bmatrix} 6 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{b}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \end{pmatrix}$, med lösningen $\bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} \bar{b}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \end{pmatrix}$.

Simplexmultiplikatorns värde erhålls ur systemet $\mathbf{A}_\beta^\mathsf{T} \mathbf{y} = \mathbf{c}_\beta$,
dvs $\begin{bmatrix} 6 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \end{pmatrix}$, med lösningen $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \end{pmatrix}$.

Reducerade kostnaderna för icke-basvariablerna ges av
$\mathbf{r}_\delta^\mathsf{T} = \mathbf{c}_\delta^\mathsf{T} - \mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{A}_\delta = (2,\ 4,\ 6) - (0.5) \begin{bmatrix} 3 & 9 & 7 \end{bmatrix} = (0.5, -0.5,\ 2.5)$.

Eftersom $r_{\delta_2} = r_3 = -0.5$ är minst, och < 0, ska vi låta x_3 bli ny basvariabel.

Då behöver vi beräkna "vektorn" $\bar{\mathbf{a}}_3$ ur systemet $\mathbf{A}_\beta \bar{\mathbf{a}}_3 = \mathbf{a}_3$,
dvs $\begin{bmatrix} 6 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a}_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \end{pmatrix}$, med lösningen $\bar{\mathbf{a}}_3 = \begin{pmatrix} \bar{a}_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5 \end{pmatrix}$.

Det största värde som den nya basvariabeln x_3 kan ökas till ges av
$t^{\max} = \min\limits_i \left\{ \dfrac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{i3}} \mid \bar{a}_{i3} > 0 \right\} = \min \left\{ \dfrac{3}{1.5} \right\} = \dfrac{3}{1.5} = \dfrac{\bar{b}_1}{\bar{a}_{13}}$.
Minimerande index är $i = 1$ (förstås), varför $x_{\beta_1} = x_1$ inte längre får vara kvar som basvariabel. Dess plats tas av x_3. Nu är alltså $\beta = (3)$ och $\delta = (2, 1, 4)$.

Motsvarande "basmatris" ges av $\mathbf{A}_\beta = \begin{bmatrix} 9 \end{bmatrix}$, medan $\mathbf{A}_\delta = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 7 \end{bmatrix}$.

Basvariabelns värde i baslösningen ges av $\mathbf{x}_\beta = \bar{\mathbf{b}}$, där "vektorn" $\bar{\mathbf{b}}$ beräknas ur systemet $\mathbf{A}_\beta \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{b}$, dvs $\begin{bmatrix} 9 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{b}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \end{pmatrix}$, med lösningen $\bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} \bar{b}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}$.

Simplexmultiplikatorns värde erhålls ur systemet $\mathbf{A}_\beta^\mathsf{T} \mathbf{y} = \mathbf{c}_\beta$,
dvs $\begin{bmatrix} 9 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \end{pmatrix}$, med lösningen $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/9 \end{pmatrix}$.

Reducerade kostnaderna för icke-basvariablerna ges av
$\mathbf{r}_\delta^\mathsf{T} = \mathbf{c}_\delta^\mathsf{T} - \mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{A}_\delta = (2,\ 3,\ 6) - (4/9) \begin{bmatrix} 3 & 6 & 7 \end{bmatrix} = (2/3,\ 1/3,\ 26/9)$.

Eftersom $\mathbf{r}_\delta \geq \mathbf{0}$ så är den aktuella baslösningen optimal.

Därmed är punkten $\mathbf{x} = (0, 0, 2, 0)^\mathsf{T}$ optimal, med optimalvärdet 8.

Uppgift 2.(b)

Om primala problemet är på standardformen

$$\begin{aligned} \text{minimera} \quad & \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} \\ \text{då} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \end{aligned}$$

så är det duala problemet på formen: maximera $\mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{y}$ då $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{y} \leq \mathbf{c}$, som här blir:

$$\begin{aligned} \text{maximera} \quad & 18y_1 \\ \text{då} \quad & 6y_1 \leq 3 \\ & 3y_1 \leq 2 \\ & 9y_1 \leq 4 \\ & 7y_1 \leq 6 \end{aligned}$$

Optimal lösning är $y_1 = 4/9$, med optimalvärdet $18y_1 = 8$.

Uppgift 2.(c)

Enligt uppgiftslydelsen har vi följande primala respektive duala problem:

$$\begin{aligned} \text{minimera} \quad & x_3 \\ \text{då} \quad & -x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 0 \\ & 3x_1 - 4x_2 + x_3 \geq 0 \\ & x_1 + x_2 = 1 \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \text{ ej teckenbegränsad.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{maximera} \quad & y_3 \\ \text{då} \quad & -y_1 + 3y_2 + y_3 \leq 0 \\ & 2y_1 - 4y_2 + y_3 \leq 0 \\ & y_1 + y_2 = 1 \\ & y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,\ y_3 \text{ ej teckenbegränsad.} \end{aligned}$$

Vi vet att $\hat{\mathbf{x}} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)^\mathsf{T} = (0.6,\ 0.4,\ -0.2)^\mathsf{T}$ är en optimal lösning till det primala problemet.

Antag att $\hat{\mathbf{y}} = (\hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{y}_3)^\mathsf{T}$ är en optimal lösning till det duala problemet.

Från dualitetssatsen följer då att $\hat{y}_3 = \hat{x}_3 = -0.2$.

Vidare följer från komplementaritetssatsen att eftersom $\hat{x}_1 > 0$ så måste $-\hat{y}_1 + 3\hat{y}_2 + \hat{y}_3 = 0$ och eftersom $\hat{x}_2 > 0$ så måste $2\hat{y}_1 - 4\hat{y}_2 + \hat{y}_3 = 0$.

Tillsammans ger detta att $\hat{y}_1 = 0.7$ och $\hat{y}_2 = 0.3$, som också mycket riktigt uppfyller de övriga bivillkoren i det duala problemet.

Alltså: $\hat{y}_1 = 0.7$, $\hat{y}_2 = 0.3$ och $\hat{y}_3 = -0.2$ är en optimal lösning till det duala problemet (i själva verket den unika optimallösningen).

Uppgift 3.(a)

Gradienten $\nabla f(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3} \right)$, där $\frac{\partial f}{\partial x_j} = 4x_j^3 - 3x_j^2 + 2x_j - 1$.

Hessianen $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ är i detta exempel en 3×3 diagonalmatris med diagonalelementen $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}$ och $\frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}$, där $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} = 12x_j^2 - 6x_j + 2$.

f är konvex på $\mathbb{R}^3$ om och endast om $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ är positivt semidefinit för alla $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$.
En diagonalmatris är positivt semidefinit om och endast om alla diagonalelement är ≥ 0.

Men $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} = 12(x_j^2 - \frac{1}{2}x_j + \frac{1}{6}) = 12((x_j - \frac{1}{4})^2 - \frac{1}{16} + \frac{1}{6}) > 0$ för alla värden på x_j.

Alltså är $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ positivt definit för alla $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, och därmed är f (strikt) konvex på $\mathbb{R}^n$.

Uppgift 3.(b)

Newtonriktningen $\mathbf{d}^{(1)}$ bestäms ur ekvationssystemet $\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(1)})\,\mathbf{d} = -\nabla f(\mathbf{x}^{(1)})^\mathsf{T}$,
förutsatt att $\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(1)})$ är positivt definit, vilket vi redan konstaterat att den är.

I vårt fall är $\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(1)})$ en diagonalmatris, varför lösningen till ekvationssystemet blir

$$d_j^{(1)} = -\frac{\partial f}{\partial x_j}(x^{(1)}) \Bigg/ \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(x^{(1)}) = -\frac{4(x_j^{(1)})^3 - 3(x_j^{(1)})^2 + 2x_j^{(1)} - 1}{12(x_j^{(1)})^2 - 6x_j^{(1)} + 2}, \quad j = 1, 2, 3.$$

Eftersom $x_j^{(1)} = 1$ för alla j så blir $d_j^{(1)} = -0.25$ för alla j.

Vi prövar med steget $t_1 = 1$, så att $\mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{x}^{(1)} + t_1\mathbf{d}^{(1)} = \mathbf{x}^{(1)} + \mathbf{d}^{(1)} = (0.75,\, 0.75,\, 0.75)^\mathsf{T}$.

Då blir $f(\mathbf{x}^{(2)}) = -\frac{225}{256} < 0 = f(\mathbf{x}^{(1)})$, så steget $t_1 = 1$ gick bra.

Därmed har vi utfört en fullständig iteration med Newtons metod.

Uppgift 3.(c)

Vi har att $f(\mathbf{x}) = f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3)$, där $f_j(x_j) = x_j^4 - x_j^3 + x_j^2 - x_j$,
som är en konvex envariabelfunktion med derivatan $f_j'(x_j) = 4x_j^3 - 3x_j^2 + 2x_j - 1$.

För deriverbara konvexa envariabelfunktioner gäller olikheten

$f_j(x_j) \geq f_j(a) + f_j'(a)(x_j - a)$, för varje $x_j \in \mathbb{R}$ och varje $a \in \mathbb{R}$.

Speciellt är $f_j'(0) = -1 < 0$ och $f_j'(1) = 2 > 0$, vilket ger olikheterna:

$f_j(x_j) \geq f_j(0) + f_j'(0)(x_j - 0) = -x_j$ för alla x_j och
$f_j(x_j) \geq f_j(1) + f_j'(1)(x_j - 1) = 2(x_j - 1) = 2x_j - 2$ för alla x_j.

Om $x_j \geq 2/3$ så är $f_j(x_j) \geq 2x_j - 2 \geq 4/3 - 2 = -2/3$.
Om $x_j \leq 2/3$ så är $f_j(x_j) \geq -x_j \geq -2/3$.

Därmed är $f(\mathbf{x}) = f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3) \geq -2$ för alla $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$,
dvs $f(\mathbf{x}) > C$ för alla $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ om konstanten C är < -2, t ex $C = -3$.

Uppgift 4.(a)

Här vill vi lösa problemet att minimera $\frac{1}{2}\,\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{x}$ då $\mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{x} = b$.

Detta är ett konvext QP-problem med ett likhetsbivillkor, så optimalitetsvillkoren blir:

$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{a} \\ \mathbf{a}^\mathsf{T} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ b \end{pmatrix}$, med lösningen $\hat{u} = \dfrac{b}{|\mathbf{a}|^2}$ och $\hat{\mathbf{x}} = \hat{u}\cdot\mathbf{a} = \dfrac{b}{|\mathbf{a}|^2}\cdot\mathbf{a}$.

Därmed är $|\hat{\mathbf{x}}|^2 = \dfrac{b^2}{|\mathbf{a}|^2}$.

Uppgift 4.(b)

Här vill vi lösa problemet att minimera $\frac{1}{2}\,\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{x}$ då $\mathbf{x} = \mathbf{c} + t\cdot\mathbf{d}$, vilket är ekvivalent med envariabelproblemet att minimera $\frac{1}{2}\,(\mathbf{c} + t\cdot\mathbf{d})^\mathsf{T}(\mathbf{c} + t\cdot\mathbf{d})$ då $t \in I\!R$.

Minimering med avseende på t ger att $\bar{t} = -\dfrac{\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{d}}{|\mathbf{d}|^2}$, varvid $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{c} - \dfrac{\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{d}}{|\mathbf{d}|^2}\cdot\mathbf{d}$.

Därmed är $|\bar{\mathbf{x}}|^2 = |\mathbf{c}|^2 - \dfrac{(\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{d})^2}{|\mathbf{d}|^2}$.

Uppgift 4.(c)

Nu är $\mathbf{d} = \mathbf{a}$. Om man sätter in $\mathbf{x} = \mathbf{c} + t\cdot\mathbf{a}$ i ekvationen $\mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{x} = b$ så erhålls att

$t = \dfrac{b - \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^2}$, varvid skärningspunkten blir $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{c} + \dfrac{b - \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^2}\cdot\mathbf{a}$.

Uppgift 4.(d)

Från (c)-uppgiften får vi att $|\tilde{\mathbf{x}}|^2 = |\mathbf{c}|^2 + \dfrac{b^2}{|\mathbf{a}|^2} - \dfrac{(\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{a})^2}{|\mathbf{a}|^2}$.

Om man jämför med svaren i (a)- och (b)-uppgifterna, och sätter $\mathbf{d} = \mathbf{a}$,
så erhålls att $|\tilde{\mathbf{x}}|^2 = |\hat{\mathbf{x}}|^2 + |\bar{\mathbf{x}}|^2$.

Den geometriska tolkningen bygger på att när $\mathbf{d} = \mathbf{a}$ så är $\hat{\mathbf{x}}$ och $\bar{\mathbf{x}}$ ortogonala och $\tilde{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{x}}$. (Detta följer av enkla kalkyler.) Därmed utgör $\tilde{\mathbf{x}}$ diagonalen i en rätvinklig rektangel vars sidor utgörs av $\hat{\mathbf{x}}$ och $\bar{\mathbf{x}}$. Sambandet $|\tilde{\mathbf{x}}|^2 = |\hat{\mathbf{x}}|^2 + |\bar{\mathbf{x}}|^2$ är då Pythagoras sats.

Uppgift 5.(a)

Problemet kan skrivas på formen: minimera $f(\mathbf{x})$ då $g_i(\mathbf{x}) \leq 0$, $i = 1, 2$, där

$f(\mathbf{x}) = 8x_1 - 6x_2$, $g_1(\mathbf{x}) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 - 4$, $g_2(\mathbf{x}) = (x_1 + 1)^2 + (x_2 + 1)^2 - 4$.

Målfunktionen är linjär, och därmed även konvex.

Båda bivillkorsfunktionerna har andraderivatsmatrisen $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ som är positivt definit.

Därmed är även bivillkorsfunktionerna konvexa, varför det betraktade problemet är ett konvext optimeringsproblem. Vidare uppfyller exempelvis $\mathbf{x} = (0, 0)^\mathsf{T}$ samtliga bivillkor med strikt olikhet, så det betraktade problemet är ett *regulärt* konvext problem. Det betyder att en punkt $\hat{\mathbf{x}}$ är en globalt optimal lösning till problemet om och endast om $\hat{\mathbf{x}}$ är en KKT-punkt.

Uppgift 5.(b)

Lagrangefunktionen kan skrivas $L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + y_1 g_1(\mathbf{x}) + y_2 g_2(\mathbf{x}) =$

$= 8x_1 - 6x_2 + y_1((x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 - 4) + y_2((x_1 + 1)^2 + (x_2 + 1)^2 - 4)$.

KKT-villkoren kan delas upp i fyra grupper enligt följande.

(KKT–1) $\partial L / \partial x_j = 0$ för $j = 1, 2$:
$8 + 2y_1(x_1 - 1) + 2y_2(x_1 + 1) = 0$,
$-6 + 2y_1(x_2 - 1) + 2y_2(x_2 + 1) = 0$.

(KKT–2) Tillåten punkt, dvs $g_i(\mathbf{x}) \leq 0$ för $i = 1, 2$:
$(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 - 4 \leq 0$,
$(x_1 + 1)^2 + (x_2 + 1)^2 - 4 \leq 0$.

(KKT–3) Lagrangemultiplikatorerna icke-negativa:
$y_1 \geq 0$,
$y_2 \geq 0$.

(KKT–4) Komplementaritetsvillkor, dvs $y_i g_i(\mathbf{x}) = 0$ för $i = 1, 2$:
$y_1((x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 - 4) = 0$,
$y_2((x_1 + 1)^2 + (x_2 + 1)^2 - 4) = 0$.

Uppgift 5.(c)

Antag först att $\mathbf{x}$ uppfyller $g_1(\mathbf{x}) = 0$ och $g_2(\mathbf{x}) < 0$. Enligt KKT–4 är då $y_2 = 0$,
varefter KKT–1 ger att $x_1 = 1 - 4/y_1$ och $x_2 = 1 + 3/y_1$.
Insättning av detta i $g_1(\mathbf{x}) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 - 4 = 0$ ger att $y_1^2 = 25/4$.
Pga KKT–3 är då $y_1 = 5/2$, vilket svarar mot punkten $x_1 = -3/5$, $x_2 = 11/5$.
Denna punkt uppfyller $g_1(\mathbf{x}) = 0$, men tyvärr blir $g_2(\mathbf{x}) > 0$ så det är ingen KKT-punkt.

Antag nu att $\mathbf{x}$ uppfyller $g_2(\mathbf{x}) = 0$ och $g_1(\mathbf{x}) < 0$. Enligt KKT–4 är då $y_1 = 0$,
varefter KKT–1 ger att $x_1 = -1 - 4/y_2$ och $x_2 = -1 + 3/y_2$.
Insättning av detta i $g_2(\mathbf{x}) = (x_1 + 1)^2 + (x_2 + 1)^2 - 4 = 0$ ger att $y_2^2 = 25/4$.
Pga KKT–3 är då $y_2 = 5/2$, vilket svarar mot punkten $x_1 = -13/5$, $x_2 = 1/5$.
Denna punkt uppfyller $g_2(\mathbf{x}) = 0$, men tyvärr blir $g_1(\mathbf{x}) > 0$ så det är ingen KKT-punkt.

Uppgift 5.(d)

Antag att $\mathbf{x}$ uppfyller $g_1(\mathbf{x}) = 0$ och $g_2(\mathbf{x}) = 0$, dvs

$$\begin{aligned} x_1^2 - 2x_1 + x_2^2 - 2x_2 = 2, \\ x_1^2 + 2x_1 + x_2^2 + 2x_2 = 2. \end{aligned}$$

Om man addera dessa ekvationer så erhålls $x_1^2 + x_2^2 = 2$.
Om man subtraherar den första ekvationen från den andra så erhålls $x_1 + x_2 = 0$.
De enda lösningarna till detta är $\mathbf{x} = (1,\, -1)^\mathsf{T}$ och $\mathbf{x} = (-1,\, 1)^\mathsf{T}$.
Dessa båda punkter uppfyller också $g_1(\mathbf{x}) = g_2(\mathbf{x}) = 0$.

Det återstår att undersöka om någon av dessa båda punkter är en KKT-punkt.

Antag först att $\mathbf{x} = (1,\, -1)^\mathsf{T}$.

Då övergår KKT–1 till $8 + 4y_2 = 0$ och $-6 - 4y_1 = 0$, dvs $y_1 = -1.5$ och $y_2 = -2$.
Men detta strider mot KKT–3, så $\mathbf{x} = (1,\, -1)^\mathsf{T}$ är inte en optimal lösning till problemet.

Antag nu att $\mathbf{x} = (-1,\, 1)^\mathsf{T}$.

Då övergår KKT–1 till $8 - 4y_1 = 0$ och $-6 + 4y_2 = 0$, dvs $y_1 = 2 \geq 0$ och $y_2 = 1.5 \geq 0$.

$\mathbf{x} = (-1,\, 1)^\mathsf{T}$ och $\mathbf{y} = (2,\, 1.5)^\mathsf{T}$ uppfyller därmed samtliga KKT-villkor
och således är $\mathbf{x} = (-1,\, 1)^\mathsf{T}$ en optimal lösning till problemet.