

Lösningar till SF1861 Optimeringslära för T, 26/8-08

Uppgift 1.(a)

Flödesbalansvillkoren i de sex noderna kan skrivas $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, där

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 25 \\ 10 \\ 0 \\ 0 \\ -15 \\ -20 \end{pmatrix}.$$

Variabelvektorn ges av $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_{13} \\ x_{14} \\ x_{23} \\ x_{24} \\ x_{35} \\ x_{36} \\ x_{45} \\ x_{46} \end{pmatrix}$, där variabeln x_{ij} betecknar flödet i bågen

från nod i till nod j . Att bågar är (enkel-)riktade ger kravet att $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$.

Flödets kostnad (som ska minimeras) ges av $\mathbf{c}^T \mathbf{x}$, där $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_{13} \\ c_{14} \\ c_{23} \\ c_{24} \\ c_{35} \\ c_{36} \\ c_{45} \\ c_{46} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \\ 5 \\ 9 \\ 8 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Om primala problemet är på standardformen

$$\begin{aligned} &\text{minimera } \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ &\text{då } \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \\ &\quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \end{aligned}$$

så är det duala problemet på formen: maximera $\mathbf{b}^T \mathbf{y}$ då $\mathbf{A}^T \mathbf{y} \leq \mathbf{c}$, som här blir:

$$\begin{aligned} &\text{maximera } 25y_1 + 10y_2 - 15y_5 - 20y_6 \\ &\text{då } \begin{aligned} &y_1 - y_3 \leq 2, \\ &y_1 - y_4 \leq 4, \\ &y_2 - y_3 \leq 3, \\ &y_2 - y_4 \leq 5, \\ &y_3 - y_5 \leq 9, \\ &y_3 - y_6 \leq 8, \\ &y_4 - y_5 \leq 7, \\ &y_4 - y_6 \leq 6. \end{aligned} \end{aligned}$$

Uppgift 1.(b)

Först använder vi Gauss–Jordans metod på den givna matrisen $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$.

Efter några “enkla radoperationer” erhålls matrisen $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{T}$.

Nu är \mathbf{A} överförd till trappstegsform med *två trappstegsettor*.

En bas till $\mathcal{R}(\mathbf{A})$ erhålls genom att som basvektorer välja de kolonner i \mathbf{A} som svarar mot trappstegsettor i \mathbf{T} , dvs kolonnerna 1 och 2 i \mathbf{A} .

De två vektorerna $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$ utgör alltså en bas till $\mathcal{R}(\mathbf{A})$.

En bas till $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ kan bestämmas enligt följande:

Sätt $x_3 = 1$ (den enda variabel som inte svarar mot en trappstegsetta) och bestäm sedan x_1 och x_2 (variablerna svarande mot trappstegsettor)

så att $\mathbf{T}\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Det ger den första och enda basvektorn $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ till $\mathcal{N}(\mathbf{A})$.

Nu använder vi Gauss–Jordans metod på den transponerade matrisen $\mathbf{A}^\top = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$.

Efter några “enkla radoperationer” erhålls matrisen $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{T}}$.

Nu är \mathbf{A}^\top överförd till trappstegsform med *två trappstegsettor*.

En bas till $\mathcal{R}(\mathbf{A}^\top)$ erhålls genom att som basvektorer välja de kolonner i \mathbf{A}^\top som svarar mot trappstegsettor i $\tilde{\mathbf{T}}$, dvs kolonnerna 1 och 2 i \mathbf{A}^\top .

De två vektorerna $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ utgör alltså en bas till $\mathcal{R}(\mathbf{A}^\top)$

En bas till $\mathcal{N}(\mathbf{A}^\top)$ kan bestämmas enligt följande:

Sätt $y_3 = 1$ (den enda variabel som inte svarar mot en trappstegsetta) och bestäm sedan y_1 och y_2 (variablerna svarande mot trappstegsettor)

så att $\tilde{\mathbf{T}}\mathbf{y} = \mathbf{0}$. Det ger den första och enda basvektorn $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ till $\mathcal{N}(\mathbf{A}^\top)$.

Notera att vi erhållit att $\mathcal{N}(\mathbf{A}^\top) = \mathcal{N}(\mathbf{A})$, vilket medför att motsvarande ortogonala komplement också är lika, dvs $\mathcal{R}(\mathbf{A}) = \mathcal{R}(\mathbf{A}^\top)$. De bägge basvektorer som vi ovan beräknade till $\mathcal{R}(\mathbf{A})$ duger alltså även som basvektorer till $\mathcal{R}(\mathbf{A}^\top)$, och de bägge basvektorer som vi ovan beräknade till $\mathcal{R}(\mathbf{A}^\top)$ duger även som basvektorer till $\mathcal{R}(\mathbf{A})$.

Uppgift 2.(a)

Vi har ett LP-problem på standardformen

$$\begin{aligned} & \text{minimera } \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ & \text{då } \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \end{aligned}$$

$$\text{där } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ och } \mathbf{c}^\top = (5, 2, 1, 1).$$

Den förslagna lösningen har basvariablerna x_1 och x_2 , dvs $\beta = (1, 2)$ och $\delta = (3, 4)$.

$$\text{Motsvarande basmatris ges av } \mathbf{A}_\beta = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \text{ medan } \mathbf{A}_\delta = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Basvariablernas värden i baslösningen ges av $\mathbf{x}_\beta = \bar{\mathbf{b}}$, där vektorn $\bar{\mathbf{b}}$ beräknas ur ekvationssystemet $\mathbf{A}_\beta \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{b}$,

$$\text{dvs } \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix}, \text{ med lösningen } \bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

dvs $x_1 = 1$ och $x_2 = 1$, vilket stämmer med förslaget.

Vektorn \mathbf{y} med simplexmultiplikatorerna värden erhålls ur systemet $\mathbf{A}_\beta^\top \mathbf{y} = \mathbf{c}_\beta$,

$$\text{dvs } \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \text{ med lösningen } \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Reducerade kostnaderna för icke-basvariablerna ges av

$$\mathbf{r}_\delta^\top = \mathbf{c}_\delta^\top - \mathbf{y}^\top \mathbf{A}_\delta = (1, 1) - (1, -1) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = (1, 1).$$

Eftersom reducerade kostnaderna är icke-negativa så är den föreslagna lösningen optimal.

$x_1 = 1$, $x_2 = 1$, övriga $x_j = 0$. Optimalvärdet = $5 + 2 = 7$.

Uppgift 2.(b)

Efter införande av slackvariabler x_5 och x_6 får vi ett nytt LP-problem på standardform, dvs minimera $\mathbf{c}^\top \mathbf{x}$ då $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ och $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, där nu

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ och } \mathbf{c}^\top = (5, 2, 1, 1, 0, 0).$$

Vi startar från baslösningen ovan, med $\beta = (1, 2)$, som ju är en tillåten baslösning även till detta nya problem.

Vektorerna $\bar{\mathbf{b}}$ och \mathbf{y} blir desamma som ovan.

Reducerade kostnaderna för icke-basvariablerna ges nu av

$$\mathbf{r}_\delta^\top = \mathbf{c}_\delta^\top - \mathbf{y}^\top \mathbf{A}_\delta = (1, 1, 0, 0) - (1, -1) \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (1, 1, 1, 1).$$

Eftersom reducerade kostnaderna är icke-negativa så är den aktuella lösningen optimal även till detta modifierade problem.

Optimal lösning: $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, övriga $x_j = 0$. Optimalvärdet = 7.

Uppgift 3.(a)

Målfunktionen är $q(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{H} \mathbf{x} + \mathbf{c}^T \mathbf{x}$, där $\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 6 & -4 & 0 \\ 0 & -4 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 6 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Punkten $\hat{\mathbf{x}}$ är en global minpunkt till $q(\mathbf{x})$ om och endast om $\mathbf{H}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$ och \mathbf{H} är positivt semidefinit. Om \mathbf{H} dessutom är positivt definit så är $\hat{\mathbf{x}}$ den unika minpunkten.

För att avgöra om \mathbf{H} är positivt definit, eller positivt semidefinit, eller ingetdera, försöker vi LDL^T-faktorisera \mathbf{H} .

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 6 & -4 & 0 \\ 0 & -4 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 6 \end{bmatrix}.$$

Addera först +1 gånger rad 1 till rad 2 och addera sedan +1 gånger kolonn 1 till kolonn 2. Det ger

$$\mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ och } \mathbf{E}_1 \mathbf{H} \mathbf{E}_1^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & -4 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 6 \end{bmatrix}.$$

Addera nu +1 gånger rad 2 till rad 3 och addera sedan +1 gånger kolonn 2 till kolonn 3. Det ger

$$\mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ och } \mathbf{E}_2 \mathbf{E}_1 \mathbf{H} \mathbf{E}_1^T \mathbf{E}_2^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 6 \end{bmatrix}.$$

Addera nu +1 gånger rad 3 till rad 4 och addera sedan +1 gånger kolonn 3 till kolonn 4. Det ger

$$\mathbf{E}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ och } \mathbf{E}_3 \mathbf{E}_2 \mathbf{E}_1 \mathbf{H} \mathbf{E}_1^T \mathbf{E}_2^T \mathbf{E}_3^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Därmed är LDL^T-faktoriseringen klar, och man har att

$$\mathbf{H} = \mathbf{L} \mathbf{D} \mathbf{L}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Alla diagonalelement i \mathbf{D} är strikt positiva, vilket medför att \mathbf{H} är positivt definit.

Ekvationssystemet $\mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$ blir i detta fall $\mathbf{H}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (ty $\mathbf{c} = \mathbf{0}$), och eftersom \mathbf{H} är positivt definit (och således ickesingulär) så är $\hat{\mathbf{x}} = (0, 0, 0, 0)^T$ den unika lösningen till detta ekvationssystem. Därmed är $\hat{\mathbf{x}} = (0, 0, 0, 0)^T$ även den unika minpunkten till $q(\mathbf{x})$.

Uppgift 3.(b)

Vi ska här minimera $\frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{H} \mathbf{x}$ under bivillkoret att $\mathbf{e}^T \mathbf{x} = 2$, där $\mathbf{e} = (1, 1, 1, 1)^T$.

Eftersom \mathbf{H} är positivt definit så har vi ett konvext QP-problem med ett linjärt bivillkor.

Då gäller att \mathbf{x} är en optimal lösning om och endast om \mathbf{x} tillsammans med en skalär u uppfyller de välkända optimalitetsvillkoren, som i detta fall kan skrivas:

$$\mathbf{H} \mathbf{x} = \mathbf{e} u \quad \text{och} \quad \mathbf{e}^T \mathbf{x} = 2.$$

För den första föreslagna punkten $\mathbf{x} = (0.7, 0.6, 0.5, 0.2)^T$ gäller dels att $\mathbf{e}^T \mathbf{x} = 2$, dels att $\mathbf{H} \mathbf{x} = (0.2, 0.2, 0.2, 0.2)^T = \mathbf{e} u$, med $u = 0.2$.

Därmed är $\mathbf{x} = (0.7, 0.6, 0.5, 0.2)^T$ en optimal lösning.

Eftersom \mathbf{H} är positivt definit så är $q(\mathbf{x})$ strikt konvex, och då kan det inte finnas flera optimala lösningar. Som en kontroll testar vi dock även den andra föreslagna punkten, dvs $\mathbf{x} = (0.8, 0.5, 0.4, 0.3)^T$. Även för denna gäller att $\mathbf{e}^T \mathbf{x} = 2$, men nu blir

$\mathbf{H} \mathbf{x} = (0.6, -0.2, -0.2, 1.0)^T$ som förvisso inte kan skrivas på formen $\mathbf{e} u$ för något u .

Därmed är $\mathbf{x} = (0.8, 0.5, 0.4, 0.3)^T$ inte en optimal lösning.

Uppgift 4.(a)

Här är $f(\mathbf{x}) = e^{x_1} + e^{x_2} + x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 - 3x_1 - 3x_2$.

Gradienten till f blir då $\nabla f(\mathbf{x}) = (e^{x_1} + 2x_1 - x_2 - 3, e^{x_2} - x_1 + 2x_2 - 3)$,

medan Hessianen till f ges av $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} e^{x_1} + 2 & -1 \\ -1 & e^{x_2} + 2 \end{bmatrix}$.

Speciellt med $\mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ är $\nabla f(\mathbf{x}^{(1)}) = (-2, -2)$ och $\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(1)}) = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$.

Matrisen $\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(1)})$ är positivt definit, ty en matris av typen $\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ är positivt definit om och endast om $a > 0$, $c > 0$ och $ac - b^2 > 0$, vilket är uppfyllt för $\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(1)})$.

Därmed bestäms Newtonriktningen $\mathbf{d}^{(1)}$ ur ekvationssystemet $\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(1)})\mathbf{d}^{(1)} = -\nabla f(\mathbf{x}^{(1)})^\top$,

dvs ur systemet $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, med lösningen $\mathbf{d}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Vi provar steget med $t_1 = 1$, så att $\mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{x}^{(1)} + t_1\mathbf{d}^{(1)} = \mathbf{x}^{(1)} + \mathbf{d}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Då blir $f(\mathbf{x}^{(2)}) = 2e - 5 < 1$, medan $f(\mathbf{x}^{(1)}) = 2$.

Eftersom $f(\mathbf{x}^{(2)}) < f(\mathbf{x}^{(1)})$ accepterar vi $\mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ som nästa iterationspunkt.

Därmed har vi utfört en iteration med Newtons metod.

Uppgift 4.(b)

Funktionen f är konvex på hela \mathbb{R}^2 om och endast om Hessianen

$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} e^{x_1} + 2 & -1 \\ -1 & e^{x_2} + 2 \end{bmatrix}$ är positivt semidefinit för alla $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$.

Men $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ är på formen $\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ med $b = -1$, $a = e^{x_1} + 2 > 2$ och $c = e^{x_2} + 2 > 2$.

Således är $a > 0$, $c > 0$ och $ac - b^2 > 0$, vilket medför att $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ är positivt definit, och därmed även positivt semidefinit, för alla $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$.

Alltså är funktionen f konvex på hela \mathbb{R}^2 .

Uppgift 5.

Målfunktionen kan skrivas

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mathbf{c})^\top (\mathbf{x} - \mathbf{c}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^\top \mathbf{I} \mathbf{x} - \mathbf{c}^\top \mathbf{x} + \frac{1}{2} \mathbf{c}^\top \mathbf{c},$$

där \mathbf{I} betecknar enhetsmatrisen.

Denna målfunktion är strikt konvex eftersom Hessianen ges av $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{I}$, som är positivt definit. Bivillkoren är linjära, och därmed konvexa.

Vidare finns det uppenbarligen punkter som uppfyller alla bivillkor med strikt olikhet, t ex $\mathbf{x} = (0, 0, 0, 0)^\top$.

Därmed är problemet ett regulärt konvext problem, vilket betyder att KKT-villkoren är både nödvändiga och tillräckliga villkor för en global optimallösning.

Skriv bivillkoren på formen $x_j - 1 \leq 0$ och $-x_j - 1 \leq 0$, samt låt motsvarande lagrangemultiplikatorer heta λ_j resp μ_j , så att lagrangemultiplikatorvektorn blir $\mathbf{y} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4)^\top$.

Då kan Lagrangefunktionen skrivas

$$\begin{aligned} L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{1}{2} \mathbf{x}^\top \mathbf{I} \mathbf{x} - \mathbf{c}^\top \mathbf{x} + \frac{1}{2} \mathbf{c}^\top \mathbf{c} + \sum_{j=1}^4 \lambda_j (x_j - 1) + \sum_{j=1}^4 \mu_j (-x_j - 1) = \\ &= \sum_{j=1}^4 \left(\frac{1}{2} x_j^2 - c_j x_j + \frac{1}{2} c_j^2 + \lambda_j (x_j - 1) + \mu_j (-x_j - 1) \right), \end{aligned}$$

och KKT-villkoren blir följande:

- (1) $x_j - c_j + \lambda_j - \mu_j = 0$, för $j = 1, 2, 3, 4$ ($\partial L / \partial x_j = 0$)
- (2) $-1 \leq x_j \leq 1$, för $j = 1, 2, 3, 4$ (Tillåten punkt)
- (3) $\lambda_j \geq 0$ och $\mu_j \geq 0$, för $j = 1, 2, 3, 4$ (Ickeneg. lagrangemult.)
- (4) $\lambda_j (1 - x_j) = 0$ och $\mu_j (1 + x_j) = 0$, för $j = 1, 2, 3, 4$ (Kompl.villkor)

Att hitta en lösning till KKT-villkoren förenklas väsentligt av att man för detta speciella ("separabla") problem kan betrakta ett index j i taget:

Om $-1 \leq c_j \leq 1$ så uppfylls KKT-villkoren av $x_j = c_j$, $\lambda_j = 0$ och $\mu_j = 0$.

Om $c_j > 1$ så uppfylls KKT-villkoren av $x_j = 1$, $\lambda_j = c_j - 1 (> 0)$ och $\mu_j = 0$.

Om $c_j < -1$ så uppfylls KKT-villkoren av $x_j = -1$, $\lambda_j = 0$ och $\mu_j = -1 - c_j (> 0)$.

Om speciellt $\mathbf{c} = (-1.4, -0.4, 0.6, 1.6)^\top$ så får vi följande lösning till KKT-villkoren:

$$\hat{\mathbf{x}} = (-1, -0.4, 0.6, 1)^\top, \quad \hat{\lambda} = (0, 0, 0, 0.6)^\top \quad \text{och} \quad \hat{\mu} = (0.4, 0, 0, 0)^\top.$$

Eftersom målfunktionen är strikt konvex och tillåtna området är konvext, så är $\hat{\mathbf{x}}$ den unika optimallösningen.

Uppgift 6.

Vi inför först några beteckningar.

Rummet som vår tvestjärt befinner sig i består av alla punkter (x, y, z) som uppfyller $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$ och $0 \leq z \leq c$.

Rummet har sex stycken "begränsningsytor", nämligen

Golvet	(G)	där $z = 0$
Taket	(T)	där $z = c$
Söderväggen	(S)	där $y = 0$
Norrväggen	(N)	där $y = b$
Västerväggen	(V)	där $x = 0$
Österväggen	(Ö)	där $x = a$

och det är endast på dessa ytor som vår tvestjärt kan färdas.

Starten går i skärningspunkten av G, S och V, medan målet ligger i skärningspunkten av T, N och Ö.

Det finns tolv stycken kantlinjer, som var och en utgör skärningen av två begränsningsytor. Sex av dessa kantlinjer är speciellt intressanta, nämligen

Norrväggen/Golvet	(NG)	där $y = b$ och $z = 0$
Golvet/Österväggen	(GÖ)	där $z = 0$ och $x = a$
Öster/Söderväggen	(ÖS)	där $x = a$ och $y = 0$
Söderväggen/Taket	(ST)	där $y = 0$ och $z = c$
Taket/Västerväggen	(TV)	där $z = c$ och $x = 0$
Väster/Norrväggen	(VN)	där $x = 0$ och $y = b$

Tillsammans bildar dessa sex kantlinjer en sluten kurva K som vår tvestjärt måste passera på sin väg från $(0, 0, 0)$ till (a, b, c) . (Om $(0, 0, 0)$ är "sydpolen" och (a, b, c) är "nordpolen" så är kurvan K "ekvatorn".)

Kortaste vägen mellan två punkter på en begränsningsyta är en rät linje.

Varje punkt (x, y, z) på kurvan K kan nås från hörnet $(0, 0, 0)$ längs en rät linje i någon av ytorna G, S eller V, och från varje punkt (x, y, z) på kurvan K kan hörnet (a, b, c) nås längs en rät linje i någon av ytorna T, N eller Ö.

Därför måste kortaste vägen från $(0, 0, 0)$ till (a, b, c) finnas bland något (eller några) av följande alternativ, där \longrightarrow betyder "längs en rät linje":

1. $(0, 0, 0) \longrightarrow (x, b, 0) \longrightarrow (a, b, c)$, där $0 \leq x \leq a$.
2. $(0, 0, 0) \longrightarrow (a, y, 0) \longrightarrow (a, b, c)$, där $0 \leq y \leq b$.
3. $(0, 0, 0) \longrightarrow (a, 0, z) \longrightarrow (a, b, c)$, där $0 \leq z \leq c$.
4. $(0, 0, 0) \longrightarrow (x, 0, c) \longrightarrow (a, b, c)$, där $0 \leq x \leq a$.
5. $(0, 0, 0) \longrightarrow (0, y, c) \longrightarrow (a, b, c)$, där $0 \leq y \leq b$.
6. $(0, 0, 0) \longrightarrow (0, b, z) \longrightarrow (a, b, c)$, där $0 \leq z \leq c$.

Låt oss analysera fall 1.

Här korsar tvejtjärtens väg "ekvatorn" i punkten $(x, b, 0)$ på kantlinjen NG.

Totala längden på denna väg är $f_1(x) = \sqrt{x^2 + b^2} + \sqrt{(a-x)^2 + c^2}$,
där x ska väljas så att $f_1(x)$ minimeras.

Kalkyler (deriveringar) visar att $f_1(x)$ är en konvex funktion som minimeras
unikt av $\hat{x} = \frac{ab}{b+c}$, varvid $f_1(\hat{x}) = \sqrt{a^2 + (b+c)^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 2bc}$.

(Detta sista resultat kan alternativt erhållas genom att "vika ner" Norrväggen så
att den utgör en fortsättning på Golvet. Hörnet (a, b, c) flyttas då ner till punkten
 $(a, b+c, 0)$, och kortaste vägen från $(0, 0, 0)$ till denna nerflyttade punkt är längs
diagonalen i en rektangel med sidorna a och $b+c$. Längden på denna diagonal
är mycket riktigt $\sqrt{a^2 + (b+c)^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 2bc}$.)

Motsvarande analyser ger följande vägar och väglängder för de sex fallen:

1. $(0, 0, 0) \rightarrow (\frac{ab}{b+c}, b, 0) \rightarrow (a, b, c)$. Väglängd $= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 2bc}$.
2. $(0, 0, 0) \rightarrow (a, \frac{ba}{a+c}, 0) \rightarrow (a, b, c)$. Väglängd $= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 2ac}$.
3. $(0, 0, 0) \rightarrow (a, 0, \frac{ca}{a+b}) \rightarrow (a, b, c)$. Väglängd $= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 2ab}$.
4. $(0, 0, 0) \rightarrow (\frac{ac}{b+c}, 0, c) \rightarrow (a, b, c)$. Väglängd $= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 2bc}$.
5. $(0, 0, 0) \rightarrow (0, \frac{bc}{a+c}, c) \rightarrow (a, b, c)$. Väglängd $= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 2ac}$.
6. $(0, 0, 0) \rightarrow (0, b, \frac{cb}{a+b}) \rightarrow (a, b, c)$. Väglängd $= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 2ab}$.

Om $a > b > c$ så är $2bc < 2ac < 2ab$ och då ger 1 och 4 de kortaste vägarna.

Om $c > a > b$ så är $2ab < 2bc < 2ac$ och då ger 3 och 6 de kortaste vägarna.