KTH Matematik

Tentamen i SF1861 och SF1851 Optimeringslära.
Fredag 17 augusti 2012 kl. 8.00–13.00

Examinator: Krister Svanberg, tel. 790 71 37

Tillåtna hjälpmedel: Penna, suddgummi och linjal. **Ej räknare!** Ett formelblad delas ut.

Lösningsmetoder: Om ej annat anges i texten skall problemen lösas med systematiska metoder som ej blir orimliga vid stora problem. Slutsatser ska motiveras ordentligt. Om ej annat anges i texten får kända satser användas utan bevis.

Bonus: Den som har minst 5 poäng från årets hemuppgifter hoppar över uppgift 1(a). Den som har minst 9 poäng från något års hemuppgifter hoppar över hela uppgift 1.

För godkänt krävs 25 poäng. 23–24 poäng ger möjlighet att komplettera inom tre veckor efter att tentamensresultatet har anslagits. Kontakta examinator.

Behandla endast en uppgift per blad. Numrera sidorna och skriv namn på varje blad.

---

1. (a) Ett givet riktat nätverk har nodmängden $\mathcal{N} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ och bågmängden $\mathcal{B} = \{(1,3),\ (1,4),\ (1,5),\ (2,3),\ (2,4),\ (2,5)\}$ (riktade bågar).

Nätverket har två källnoder: nod 1 med tillgången 35 enheter och nod 2 med tillgången 40 enheter, samt tre sänknoder: nod 3 med efterfrågan 20 enheter, nod 4 med efterfrågan 30 enheter och nod 5 med efterfrågan 25 enheter.

Flödeskostnaden c_{ij}, i sorten kkr per enhet flöde, för respektive båge (i, j) i nätverket är enligt följande:

$c_{13} = 19,\ \ c_{14} = 14,\ \ c_{15} = 18,\ c_{23} = 23,\ \ c_{24} = 16,\ \ c_{25} = 21.$

Man vill bestämma ett flöde av minimal kostnad som uppfyller kraven på tillgång och efterfrågan enligt ovan.

Du ska formulera detta problem som ett LP-problem på standardform, dvs

$$\text{minimera } \mathbf{c}^{\mathsf{T}}\mathbf{x} \text{ då } \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ och } \mathbf{x} \geq \mathbf{0}.$$

Ange i detalj vad $\mathbf{A}$, $\mathbf{b}$ och $\mathbf{c}$ är i detta fall, samt vad komponenterna i variabelvektorn $\mathbf{x}$ står för.

Du ska därefter formulera motsvarande duala LP-problem på komponentform, vilket betyder att du ska skriva ner målfunktionen och de enskilda bivillkoren explicit.

Du behöver inte bestämma någon optimal lösning till ovanstående problem, varken till det primala eller det duala. . . . . (5p)

(b) Bestäm grafiskt, i noggranna figurer, optimal lösning till vart och ett av följande fyra problem: . . . . (4p)

$$\begin{aligned}
&\text{minimera } 3x_1 - 4x_2 \ \text{ då } -1 \leq x_1 \leq 1,\ -1 \leq x_2 \leq 1.\\
&\text{minimera } 3x_1 - 4x_2 \ \text{ då } x_1 + x_2 \leq 1,\ x_1 \geq -1,\ x_2 \geq -1.\\
&\text{minimera } 3x_1 - 4x_2 \ \text{ då } x_1^2 + x_2^2 \leq 1.\\
&\text{minimera } 3x_1 - 4x_2 \ \text{ då } |x_1| + |x_2| \leq 1.
\end{aligned}$$

2. (a) Lös följande LP-problem med simplexmetoden.
Du ska starta med x_1, x_2 och x_3 som basvariabler.

$$\begin{aligned} \text{minimera} \quad & 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 4x_4 \\ \text{då} \quad & x_1 + x_2 = 1, \\ & x_2 + x_3 = 1, \\ & x_3 + x_4 = 1, \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

Ange din erhållna optimala lösning $\hat{\mathbf{x}}$ och motsvarande optimalvärde. . . . (6p)

(b) Är den optimala lösning $\hat{\mathbf{x}}$ som du bestämde i (a)-uppgiften den enda optimala lösningen till problemet? Motivera svaret. . . . . (1p)

(c) Formulera det duala LP-problemet svarande mot LP-problemet i (a)-uppgiften, och ange en optimal lösning till detta duala problem. (2p)

(d) Är den optimala lösning som du angav i (c)-uppgiften den enda optimala lösningen till det duala problemet? Om svaret är "nej" ska du ange minst en annan optimal lösning. . . . . (3p)

3. Betrakta följande QP-problem med likhetsbivillkor:

$$\begin{aligned} \text{minimera} \quad & x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 + 3x_4^2 \\ \text{då} \quad & x_1 + x_2 = 1, \\ & x_2 + x_3 = 1, \\ & x_3 + x_4 = 1. \end{aligned}$$

(a) Använd en nollrumsmetod för att lösa problemet. Ange din erhållna optimala lösning och motsvarande optimalvärde. . . . . (6p)

(b) Ställ upp Lagrangevillkoren för problemet och bestäm en lösning $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{u}})$ till dessa optimalitetsvillkor.
Du får gärna använda dig av dina resultat från (a)-uppgiften. . . . . (4p)

4. Man antar (på fysikaliska grunder) att storheten w beror av tiden t enligt formeln

$$w(t) = \frac{1}{1 + c\,t}$$

för någon positiv konstant c. För att bestämma värdet på c försöker man mäta w för några olika t, och sedan välja det värde på c som minimerar kvadratsumman

$$\tfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{1}{1 + c\,t_i} - w_i \right)^2,$$

där $w_1, \ldots, w_m$ är de erhållna mätresultaten vid de givna mättidpunkterna $t_1, \ldots, t_m$.
Antag fortsättningsvis följande data: $m = 2$, $t_1 = 1$, $t_2 = 3$, $w_1 = 0.46$, $w_2 = 0.22$.

(a) Starta med gissningen $c = 1$ och utför en iteration med Gauss-Newtons metod för att bestämma ett bättre värde på c i ovanstående mening. . . . . (6p)

(b) Antag nu att du utför en iteration med Newtons metod utgående från startgissningen $c = 1$. Blir det erhållna nya värdet på c större eller mindre än det värde på c som erhölls med Gauss-Newtons metod i (a)-uppgiften? . . . . . . (4p)

5. Man vill placera ut fyra olika reella tal x_1, x_2, x_3 och x_4 på intervallet $[0, 3]$ på ett sådant sätt att följande uttryck minimeras:

$$\frac{1}{|x_2 - x_1|} + \frac{1}{|x_3 - x_1|} + \frac{1}{|x_4 - x_1|} + \frac{1}{|x_3 - x_2|} + \frac{1}{|x_4 - x_2|} + \frac{1}{|x_4 - x_3|}$$

under bivillkoren att $0 \leq x_1 < x_2 < x_3 < x_4 \leq 3$.

Någon föreslår lösningen $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0,\ 1,\ 2,\ 3)$.

Avgör om denna föreslagna lösning är
(i) en globalt optimal lösning till problemet, eller
(ii) en lokalt men ej globalt optimal lösning till problemet, eller
(iii) varken en globalt eller lokalt optimal lösning till problemet. ....(9p)

(Anmärkning: En fysikalisk tolkning, som dock inte får användas för att lösa problemet, erhålls genom observationen att uttrycket ovan är proportionellt mot den elektriska potentialen för fyra partiklar med identiska laddningar som är instängda på intervallet $[0, 3]$ och som befinner sig i de olika punkterna x_1, x_2, x_3 och x_4. Som bekant strävar naturen efter att placera partiklarna så att denna potential minimeras.)

Lycka till!