Lösningar till SF1861/SF1851 Optimeringslära, 30/8 2013

Uppgift 1.(a)

Inför följande variabler:

x_1 = antal enheter av produkt A som tillverkas per dag.
x_2 = antal enheter av produkt B som tillverkas per dag.
x_3 = antal enheter av produkt C som tillverkas per dag.

Täckningsbidraget per dag ges då av $11x_1 + 9x_2 + 8x_3$.

Kapacitetsbegränsningen i stansavdelningen kan skrivas $\dfrac{x_1}{2000} + \dfrac{x_2}{1600} + \dfrac{x_3}{1200} \leq 8$.

Kapacitetsbegränsningen i pressavdelningen kan skrivas $\dfrac{x_1}{1000} + \dfrac{x_2}{1500} + \dfrac{x_3}{1900} \leq 8$.

Det ger oss följande problemformulering:

$$
\begin{aligned}
\text{maximera} \quad & 11x_1 + 9x_2 + 8x_3 \\
\text{då} \quad & \frac{x_1}{2000} + \frac{x_2}{1600} + \frac{x_3}{1200} \leq 8, \\
& \frac{x_1}{1000} + \frac{x_2}{1500} + \frac{x_3}{1900} \leq 8, \\
& x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0.
\end{aligned}
$$

Uppgift 1.(b)

Först använder vi Gauss–Jordans metod på den givna matrisen $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 7 \\ 3 & 6 & 9 & 9 \end{bmatrix}$.

Efter några "enkla radoperationer" erhålls matrisen $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{T}$.

Nu är $\mathbf{A}$ överförd till trappstegsform med *två trappstegsettor*.
En bas till $\mathcal{R}(\mathbf{A})$ erhålls genom att som basvektorer välja de kolonner i $\mathbf{A}$ som svarar mot trappstegsettor i $\mathbf{T}$, dvs kolonnerna nummer 1 och 3 i $\mathbf{A}$.

De två vektorerna $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}$ utgör alltså en bas till $\mathcal{R}(\mathbf{A})$.

Observera att de bägge ekvationssystemet $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ och $\mathbf{Tx} = \mathbf{0}$ har exakt samma lösningsmängd, eftersom de enkla radoperationerna inte ändrar denna.

Men den allmänna lösningen till $\mathbf{Tx} = \mathbf{0}$ erhålls genom att först sätta de variabler som inte svarar mot trappstegsettor, dvs x_2 och x_4, till godtyckliga tal t och s, dvs $x_2 = t$ och $x_4 = s$, och därefter bestämma hur "trappstegsvariablerna" x_1 och x_3 måste bero av t och s för att $\mathbf{Tx} = \mathbf{0}$ ska bli uppfyllt.

Detta ger att den allmänna lösningen till $\mathbf{Tx} = \mathbf{0}$, och därmed även till $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$, är $x_1 = -2t - 6s,\ \ x_2 = t,\ \ x_3 = s,\ \ x_4 = s$, som kan skrivas

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot t + \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot s\,, \text{ för godtyckliga värden på } t \text{ och } s.$$

Av detta framgår att de båda vektorerna $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ utgör en bas till $\mathcal{N}(\mathbf{A})$.

Nu använder vi Gauss–Jordans metod på den transponerade matrisen $\mathbf{A}^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 9 \\ 3 & 7 & 9 \end{bmatrix}$.

Efter några "enkla radoperationer" erhålls matrisen $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{T}}$.

Nu är $\mathbf{A}^{\mathsf{T}}$ överförd till trappstegsform med *två trappstegsettor*.
En bas till $\mathcal{R}(\mathbf{A}^{\mathsf{T}})$ erhålls genom att som basvektorer välja de kolonner i $\mathbf{A}^{\mathsf{T}}$ som svarar mot trappstegsettor i $\tilde{\mathbf{T}}$, dvs kolonnerna nummer 1 och 2 i $\mathbf{A}^{\mathsf{T}}$.

De två vektorerna $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$ utgör alltså en bas till $\mathcal{R}(\mathbf{A}^{\mathsf{T}})$

De bägge ekvationssystemet $\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{y} = \mathbf{0}$ och $\tilde{\mathbf{T}}\mathbf{y} = \mathbf{0}$ har exakt samma lösningsmängd, eftersom de enkla radoperationerna inte ändrar denna.

Men den allmänna lösningen till $\tilde{\mathbf{T}}\mathbf{y} = \mathbf{0}$ erhålls genom att först sätta den variabel som inte svarar mot trappstegsettor, dvs y_3, till ett godtyckligt tal t, dvs $y_3 = t$, och därefter bestämma hur "trappstegsvariablerna" y_1 och y_2 måste bero av t för att $\tilde{\mathbf{T}}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ska bli uppfyllt. Detta ger att den allmänna lösningen till $\tilde{\mathbf{T}}\mathbf{y} = \mathbf{0}$, och därmed även till $\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{y} = \mathbf{0}$, är $y_1 = -3t,\ \ y_2 = 0,\ \ y_3 = t$, som kan skrivas

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot t\,, \text{ för godtyckligt värde på } t.$$

Av detta framgår att vektorn $\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ utgör en bas till $\mathcal{N}(\mathbf{A}^{\mathsf{T}})$.

Uppgift 2.(a)

Vi har ett LP-problem på standardformen

$$\begin{aligned} \text{minimera} \quad & \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} \\ \text{då} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\,, \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\,, \end{aligned}$$

där $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ och $\mathbf{c}^\mathsf{T} = (1,\, 3,\, 1,\, 1)$.

Den förslagna lösningen har basvariablerna x_1 och x_2, dvs $\beta = (1, 2)$ och $\delta = (3, 4)$.

Motsvarande basmatris ges av $\mathbf{A}_\beta = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, medan $\mathbf{A}_\delta = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$.

Basvariablernas värden i baslösningen ges av $\mathbf{x}_\beta = \bar{\mathbf{b}}$, där vektorn $\bar{\mathbf{b}}$ beräknas ur ekvationssystemet $\mathbf{A}_\beta \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{b}$,

dvs $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, med lösningen $\bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$,

dvs $x_1 = 1.5$ och $x_2 = 0.5$, vilket stämmer med förslaget.

Vektorn $\mathbf{y}$ med simplexmultiplikatorerna värden erhålls ur systemet $\mathbf{A}_\beta^\mathsf{T}\mathbf{y} = \mathbf{c}_\beta$,

dvs $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, med lösningen $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Reducerade kostnaderna för icke-basvariablerna ges av

$\mathbf{r}_\delta^\mathsf{T} = \mathbf{c}_\delta^\mathsf{T} - \mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{A}_\delta = (1,\, 1) - (-1,\, 2) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = (4,\, 2)$.

Eftersom reducerade kostnaderna är icke-negativa så är den föreslagna lösningen optimal.

$x_1 = 1.5$, $x_2 = 0.5$, övriga $x_j = 0$. Optimalvärdet $= 3$.

Uppgift 2.(b)

Efter införande av slackvariabler x_5 och x_6 får vi ett nytt LP-problem på standardformen

$$\begin{aligned} \text{minimera} \quad & \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} \\ \text{då} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\,, \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\,, \end{aligned}$$

där nu $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ och $\mathbf{c}^\mathsf{T} = (1,\, 3,\, 1,\, 1,\, 0,\, 0)$.

Vi startar från baslösningen ovan, med $\beta = (1, 2)$, som är en tillåten baslösning även till detta nya problem.

Vektorerna $\bar{\mathbf{b}}$ och $\mathbf{y}$ blir desamma som ovan.

Reducerade kostnaderna för icke-basvariablerna ges nu av
$\mathbf{r}_\delta^\mathsf{T} = \mathbf{c}_\delta^\mathsf{T} - \mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{A}_\delta = (1,\, 1,\, 0,\, 0) - (-1,\, 2) \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = (4,\, 2, -1,\, 2).$

Eftersom $r_{\delta_3} = r_5 = -1$ är minst, och < 0, ska vi låta x_5 bli ny basvariabel.

Då behöver vi beräkna vektorn $\bar{\mathbf{a}}_5$ ur systemet $\mathbf{A}_\beta \bar{\mathbf{a}}_5 = \mathbf{a}_5$,

dvs $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a}_{15} \\ \bar{a}_{25} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, med lösningen $\bar{\mathbf{a}}_1 = \begin{pmatrix} \bar{a}_{15} \\ \bar{a}_{25} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$.

Det största värde som den nya basvariabeln x_1 kan ökas till ges av

$$t^{\max} = \min_i \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{i5}} \mid \bar{a}_{i5} > 0 \right\} = \frac{0.5}{0.5} = \frac{\bar{b}_2}{\bar{a}_{25}}.$$

Minimerande index är $i = 2$, varför $x_{\beta_2} = x_2$ inte längre får vara kvar som basvariabel. Dess plats tas av x_5.

Nu är alltså $\beta = (1, 5)$ och $\delta = (2, 3, 4, 6)$.

Motsvarande basmatris ges av $\mathbf{A}_\beta = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, medan $\mathbf{A}_\delta = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$.

Basvariablernas värden i baslösningen ges av $\mathbf{x}_\beta = \bar{\mathbf{b}}$, där vektorn $\bar{\mathbf{b}}$ beräknas ur ekvationssystemet $\mathbf{A}_\beta \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{b}$,

dvs $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, med lösningen $\bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Vektorn $\mathbf{y}$ med simplexmultiplikatorerna värden erhålls ur systemet $\mathbf{A}_\beta^\mathsf{T}\mathbf{y} = \mathbf{c}_\beta$,

dvs $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, med lösningen $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Reducerade kostnaderna för icke-basvariablerna ges nu av
$\mathbf{r}_\delta^\mathsf{T} = \mathbf{c}_\delta^\mathsf{T} - \mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{A}_\delta = (3,\, 1,\, 1,\, 0) - (0,\, 1) \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = (2,\, 2,\, 2,\, 1).$

Eftersom reducerade kostnaderna är icke-negativa så är den aktuella lösningen optimal.

$x_1 = 2$, $x_5 = 1$, övriga $x_j = 0$.

Optimalvärdet $= 2$.

Uppgift 2.(c)

Det primala problemet P1 är på standardformen

$$\text{minimera}\ \ \mathbf{c}^{\mathsf{T}}\mathbf{x}\ \ \text{då}\ \ \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\ \ \text{och}\ \ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}.$$

Det motsvarande duala problemet D1 är då på formen

$$\text{maximera}\ \ \mathbf{b}^{\mathsf{T}}\mathbf{y}\ \ \text{då}\ \ \mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{y} \leq \mathbf{c},$$

som utskrivet blir:

$$\begin{array}{rrcl} \text{maximera} & y_1 + 2y_2 & & \\ \text{då} & y_1 + y_2 & \leq & 1, \\ & -y_1 + y_2 & \leq & 3, \\ & y_1 - y_2 & \leq & 1, \\ & -y_1 - y_2 & \leq & 1. \end{array}$$

En noggrann figur ger att det tillåtna området är en rektangel med hörnen i pukterna $(1, 0)$, $(-1, 2)$, $(-2, 1)$ och $(0, -1)$.

Nivåkurvorna till målfunktionen $y_1 + 2y_2$ är parallella linjer vinkelräta mot vektorn $(1, 2)$, med växande värden åt “nordnordost”.

Den nivåkurva som svarar mot det maximala värdet på målfunktionen i det tillåtna området ges ur figuren av linjen $y_1 + 2y_2 = 3$ som går genom hörnpunkten $(y_1, y_2) = (-1, 2)$. Denna hörnpunkt är alltså den optimala lösningen till det duala problemet D1.

Det primala problemet P2 är på formen

$$\text{minimera}\ \ \mathbf{c}^{\mathsf{T}}\mathbf{x}\ \ \text{då}\ \ \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}\ \ \text{och}\ \ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}.$$

Det motsvarande duala problemet D2 är då på formen

$$\text{maximera}\ \ \mathbf{b}^{\mathsf{T}}\mathbf{y}\ \ \text{då}\ \ \mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{y} \leq \mathbf{c}\ \ \text{och}\ \ \mathbf{y} \geq \mathbf{0},$$

som utskrivet blir:

$$\begin{array}{rrcl} \text{maximera} & y_1 + 2y_2 & & \\ \text{då} & y_1 + y_2 & \leq & 1, \\ & -y_1 + y_2 & \leq & 3, \\ & y_1 - y_2 & \leq & 1, \\ & -y_1 - y_2 & \leq & 1, \\ & y_i & \geq & 0,\ i = 1, 2. \end{array}$$

En noggrann figur ger att det tillåtna området är en triangel med hörnen i pukterna $(1, 0)$, $(0, 1)$ och $(0, 0)$.

Nivåkurvorna till målfunktionen $y_1 + 2y_2$ är parallella linjer vinkelräta mot vektorn $(1, 2)$, med växande värden åt “nordnordost”.

Den nivåkurva som svarar mot det maximala värdet på målfunktionen i det tillåtna området ges ur figuren av linjen $y_1 + 2y_2 = 2$ som går genom hörnpunkten $(y_1, y_2) = (0, 1)$. Denna hörnpunkt är alltså den optimala lösningen till det duala problemet D2.

Uppgift 3.

Låt $\mathbf{x} = (x_{13},\, x_{14},\, x_{23},\, x_{24})^\mathsf{T} \in I\!R^4$.

Eftersom alla $R_{ij} = 1$ så är effektminimeringsproblemet ekvivalent med QP-problemet

$$\begin{array}{rl} \text{minimera} & \frac{1}{2}\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{I}\,\mathbf{x} \quad (\,=\text{halva värmeeffekten}) \\ \text{då} & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\,, \end{array}$$

där $\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Detta QP-problem är i sin tur ekvivalent med det linjära ekvationssystemet

$$\begin{array}{rcrcl} \mathbf{I}\,\mathbf{x} & - & \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{u} & = & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}\mathbf{x} & & & = & \mathbf{b} \end{array}$$

Ur $\mathbf{I}\,\mathbf{x} - \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{u} = \mathbf{0}$ erhålls att $\mathbf{x} = \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{u}$, som insatt i $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ger ekv.systemet $\mathbf{A}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{u} = \mathbf{b}$.

I vårt fall är $\mathbf{A}\mathbf{A}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Gauss-Jordans metod (eller Gausselimination) tillämpat på ekvationssystemet

$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ger lösningen $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Länkströmmarna ges sedan av $\mathbf{x} = \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

dvs $x_{13} = 1,\ x_{14} = 3,\ x_{23} = -1$ och $x_{24} = 1$.
Strömmen i länken $(2, 3)$ går alltså från nod 3 till nod 2.

Uppgift 4.(a)

Målfunktionen är $f(\mathbf{x}) = x_1^2 x_2^2 + x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_1 - 6x_2$.

Gradienten till f ges av $\nabla f(\mathbf{x}) = (2x_1 x_2^2 + 2x_1 - 2,\ 2x_1^2 x_2 + 6x_2 - 6)^\mathsf{T}$.

Hessianen till f ges av $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 2x_2^2 + 2 & 4x_1 x_2 \\ 4x_1 x_2 & 2x_1^2 + 6 \end{bmatrix}$.

Startpunkten ges enligt uppgift av $\mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Första Newtonriktningen $\mathbf{d}^{(1)}$ bestäms ur ekvationssystemet $\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(1)})\mathbf{d} = -\nabla f(\mathbf{x}^{(1)})^\mathsf{T}$, förutsatt att $\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(1)})$ är positivt definit.

$\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(1)}) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$ är positivt definit (se räknehjälpen med $a = 2$, $b = 0$ och $c = 6$)

så Newtonriktningen ges av lösningen till $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$, dvs $\mathbf{d}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Vi prövar först steget $t_1 = 1$, så att $\mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{x}^{(1)} + t_1 \mathbf{d}^{(1)} = \mathbf{x}^{(1)} + \mathbf{d}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Då blir $f(\mathbf{x}^{(2)}) = -3 < 0 = f(\mathbf{x}^{(1)})$, så steget $t_1 = 1$ accepteras.

Därmed har vi utfört en fullständig iteration med Newtons metod och erhållit iterationspunkten $\mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ med $f(\mathbf{x}^{(2)}) = -3$.

Nästa Newtonriktning $\mathbf{d}^{(2)}$ bestäms ur ekvationssystemet $\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(2)})\mathbf{d} = -\nabla f(\mathbf{x}^{(2)})^\mathsf{T}$, förutsatt att $\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(2)})$ är positivt definit.

$\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(2)}) = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$ är positivt definit (se räknehjälpen med $a = 4$, $b = 4$ och $c = 8$)

så Newtonriktningen ges av lösningen till $\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} \mathbf{d} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$, dvs $\mathbf{d}^{(2)} = \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Vi prövar först steget $t_2 = 1$, så att $\mathbf{x}^{(3)} = \mathbf{x}^{(2)} + t_2 \mathbf{d}^{(2)} = \mathbf{x}^{(2)} + \mathbf{d}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Då blir $f(\mathbf{x}^{(3)}) = -3.5 < -3 = f(\mathbf{x}^{(2)})$, så steget $t_2 = 1$ gick bra.

Därmed har vi utfört två fullständiga iterationer med Newtons metod och erhållit iterationspunkten $\mathbf{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1 \end{pmatrix}$ med $f(\mathbf{x}^{(3)}) = -3.5$.

Uppgift 4.(b)

Vi ska nu avgöra om punkten $\bar{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1 \end{pmatrix}$ är en lokal minpunkt till f.

(Den valda punkten $\bar{\mathbf{x}}$ är som synes vår aktuella iterationspunkt $\mathbf{x}^{(3)}$.)

Ett nödvändigt villkor för att $\bar{\mathbf{x}}$ ska vara en minpunkt till f (utan bivillkor) är att $\nabla f(\bar{\mathbf{x}}) = (0, 0)$.

Men $\nabla f(\bar{\mathbf{x}}) = (2\bar{x}_1\bar{x}_2^2 + 2\bar{x}_1 - 2,\ 2\bar{x}_1^2\bar{x}_2 + 6\bar{x}_2 - 6) = (0,\ 0.5) \neq (0, 0)$,
så $\bar{\mathbf{x}}$ är ej en minpunkt till f.

Uppgift 4.(c)

f är konvex på hela $I\!R^2$ om och endast om Hessianen $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 2x_2^2 + 2 & 4x_1x_2 \\ 4x_1x_2 & 2x_1^2 + 6 \end{bmatrix}$
är positivt semidefinit för alla $x \in I\!R^2$.

En symmetrisk $2 \times 2-$matris $\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ är som bekant positivt semidefinit
om och endast om $a \geq 0$, $c \geq 0$ och $ac - b^2 \geq 0$.

För den ovanstående matrisen är $a = 2x_2^2 + 2 > 0$ och $c = 2x_1^2 + 6 > 0$, men

$ac - b^2 = (2x_2^2 + 2)(2x_1^2 + 6) - (4x_1x_2)(4x_1x_2) = 12 + 4x_1^2 + 12x_2^2 - 12x_1^2x_2^2$,

som blir negativ om både x_1 och x_2 är tillräckligt stora tal.

Om exempelvis $x_1 = x_2 = 10$ så blir $12 + 4x_1^2 + 12x_2^2 - 12x_1^2x_2^2 = 12 + 400 + 1200 - 120000 < 0$.

f är alltså *inte* konvex på hela $I\!R^2$.

Uppgift 5.(a)

Att $f(\hat{\mathbf{x}}) \leq f(\mathbf{x})$ för alla $\mathbf{x} \in I\!R^n$ är detsamma som att $\hat{\mathbf{x}}$ är en global minpunkt till den kvadratiska funktionen f, vilket i sin tur (eftersom $\mathbf{H}$ är symmetrisk och positivt semidefinit) är ekvivalent med att $\mathbf{H}\hat{\mathbf{x}} = -\mathbf{c}$.

Men då måste $\hat{\mathbf{x}} \neq \mathbf{0}$, ty om $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ så är ju $\mathbf{H}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{H}\mathbf{0} = \mathbf{0} \neq -\mathbf{c}$ (eftersom $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$).

Vidare är $f(\hat{\mathbf{x}}) < f(\mathbf{0})$ (eftersom $\hat{\mathbf{x}}$ är en global minpunkt medan $\mathbf{0}$ inte är det),
vilket ger att $f(\hat{\mathbf{x}}) < f(\mathbf{0}) = \frac{1}{2}\,\mathbf{0}^{\mathsf{T}}\mathbf{H}\,\mathbf{0} + \mathbf{c}^{\mathsf{T}}\mathbf{0} = 0$, dvs $f(\hat{\mathbf{x}}) < 0$.

Slutligen får vi att $\hat{\mathbf{x}}^{\mathsf{T}}\mathbf{H}\hat{\mathbf{x}} > 0$, ty $f(\hat{\mathbf{x}}) < 0$ och

$f(\hat{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2}\,\hat{\mathbf{x}}^{\mathsf{T}}\mathbf{H}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{c}^{\mathsf{T}}\hat{\mathbf{x}} = \frac{1}{2}\,\hat{\mathbf{x}}^{\mathsf{T}}\mathbf{H}\hat{\mathbf{x}} + (-\mathbf{H}\hat{\mathbf{x}})^{\mathsf{T}}\hat{\mathbf{x}} = \frac{1}{2}\,\hat{\mathbf{x}}^{\mathsf{T}}\mathbf{H}\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}}^{\mathsf{T}}\mathbf{H}\hat{\mathbf{x}} = -\frac{1}{2}\,\hat{\mathbf{x}}^{\mathsf{T}}\mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}$.

Uppgift 5.(b)

Bivillkoren $x_j \geq 0$ kan ekvivalent skrivas $g_j(\mathbf{x}) \leq 0$, där $g_j(\mathbf{x}) = -x_j$.

Lagrangefunktionen blir då $L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{n} y_j g_j(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^{n} y_j x_j$.

KKT-villkoren kan delas upp i fyra grupper enligt följande.

(KKT1) $\dfrac{\partial L}{\partial x_j}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}) = 0$ för alla j, dvs $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(\hat{\mathbf{x}}) - \hat{y}_j = 0$ för $j = 1, \ldots, n$.

(KKT2) Tillåten punkt, dvs $g_j(\hat{\mathbf{x}}) \leq 0$ för alla j, dvs $\hat{x}_j \geq 0$ för $j = 1, \ldots, n$.

(KKT3) Samtliga Lagrangemultiplikatorer icke-negativa, dvs $\hat{y}_j \geq 0$ för $j = 1, \ldots, n$.

(KKT4) Komplementaritetsvillkoren $\hat{y}_j g_j(\hat{\mathbf{x}}) = 0$, dvs $\hat{y}_j \hat{x}_j = 0$ för $j = 1, \ldots, n$.

Eftersom såväl målfunktionen $f(\mathbf{x})$ som bivillkorsfunktionerna $g_j(\mathbf{x}) = -x_j$ är konvexa funktioner, och det finns punkter $\mathbf{x}$ som uppfyller $g_j(\mathbf{x}) < 0$ för alla j (t ex $\mathbf{x} = (1, \ldots, 1)^\mathsf{T}$) så har vi ett *regulärt konvext* optimeringsproblem.
Det betyder, enligt en känd sats, att $\hat{\mathbf{x}}$ är en globalt optimal lösning till problemet om och endast om det finns skalärer $\hat{y}_1, \ldots, \hat{y}_n$ som tillsammans med $\hat{\mathbf{x}}$ uppfyller KKT-villkoren ovan.

Med hjälp av (KKT1) kan skalärerna $\hat{y}_j$ elimineras, varvid KKT-villkoren övergår till:

(KKT2)' $\hat{x}_j \geq 0\,$, för $j = 1, \ldots, n$.

(KKT3)' $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(\hat{\mathbf{x}}) \geq 0\,$, för $j = 1, \ldots, n$.

(KKT4)' $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(\hat{\mathbf{x}}) \cdot \hat{x}_j = 0\,$, för $j = 1, \ldots, n$.

$\hat{\mathbf{x}}$ är alltså en globalt optimal lösning till problemet om och endast om $\hat{\mathbf{x}}$ uppfyller villkoren (KKT2)' – (KKT4)'.

Nu återstår det bara att visa att $\hat{\mathbf{x}}$ uppfyller (KKT2)' – (KKT4)' om och endast om $\hat{\mathbf{x}}$ uppfyller följande villkor (KKT2)"– (KKT4)":

(KKT2)" $\hat{\mathbf{x}} \geq \mathbf{0}$.

(KKT3)" $\nabla f(\hat{\mathbf{x}})^\mathsf{T} \geq \mathbf{0}$.

(KKT4)" $\nabla f(\hat{\mathbf{x}})\, \hat{\mathbf{x}} = 0$.

Men (KKT2)" och (KKT3)" är per definition ekvivalenta med (KKT2)' och (KKT3)',
medan (KKT4)" kan skrivas $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\hat{\mathbf{x}}) \cdot \hat{x}_j = 0\,$.

Om (KKT4)' är uppfyllt så är varje term i denna summa $= 0$, så att (KKT4)" är uppfyllt.
Omvänt, om (KKT4)" är uppfyllt så är summan $= 0$. Men eftersom varje term i summan är icke-negativ (enligt (KKT2)" och (KKT3)") så måste då alla termer i summan vara $= 0$, vilket betyder att (KKT4)' är uppfyllt.
Alltså är villkoren (KKT2)"– (KKT4)" tillsammans ekvivalenta med (KKT2)' – (KKT4)', vilka i sin tur är ekvivalenta med att $\hat{\mathbf{x}}$ är en globalt optimal lösning till problemet.