Lösningar till tentan i SF1861 Optimeringslära, 17 aug, 2015

1.(a)

Inför följande variabler, för $i = 1,2,3$ och $j = 1,2,3,4$:

x_{ij} = antal timmar (under den aktuella veckan) man låter maskin M_i tillverka kabeltyp K_j.

Inför vidare följande konstanter, för $i = 1,2,3$ och $j = 1,2,3,4$:

c_i = den givna driftskostnaden i kronor per timme för M_i, dvs $(c_1, c_2, c_3) = (350, 500, 750)$.

b_j = den givna orderlängden i meter för K_j, dvs $(b_1, b_2, b_3, b_4) = (16000, 10000, 12000, 8000)$.

v_{ij} = den givna produktionshastigheten i meter/timme vid tillverkning av K_j med M_i,
dvs $v_{11} = 300$, $v_{12} = 250$, $\ldots$, $v_{34} = 300$.

Då kan problemet formuleras:

$$
\begin{aligned}
\text{minimera} \quad & \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{4} c_i x_{ij} \\
\text{då} \quad & \sum_{j=1}^{4} x_{ij} \leq 50, \ \text{för } i = 1,2,3, \\
& \sum_{i=1}^{3} v_{ij} x_{ij} = b_j, \ \text{för } j = 1,2,3,4, \\
& x_{ij} \geq 0, \ \text{för } i = 1,2,3 \text{ och } j = 1,2,3,4.
\end{aligned}
$$

1.(b)
Nätverket svarande mot det givna LP-problemet kan illustreras av den vänstra figuren nedan, där tillgången i noderna (dvs komponenterna i vektorn $\mathbf{b}$) och kostnaden per flödesenhet för bågarna (dvs komponenterna i vektorn $\mathbf{c}$) är utskrivna i figuren.
Alla bågar är riktade från vänster till höger. Negativ tillgång svarar mot positiv efterfrågan.

De nollskilda komponenterna i den föreslagna lösningen $\hat{\mathbf{x}} = (40,\ 0,\ 50,\ 25,\ 0,\ 20,\ 0)^\mathsf{T}$ kan illustreras av den högra figuren nedan, med bågflödena utskrivna i figuren.
Eftersom de utskrivna flödena i figuren uppfyller flödesbalansvillkoren i samtliga noder (dvs $\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{b}$) och är icke-negativa (dvs $\hat{\mathbf{x}} \geq \mathbf{0}$) så är $\hat{\mathbf{x}}$ en tillåten lösning till LP-problemet.
Efter dessutom de i figuren utritade bågarna utgör ett *uppspännande träd* så är $\hat{\mathbf{x}}$ en tillåten *baslösning* till LP-problemet.

```
        Nod 2      Nod 4
         +35         -25                   +35          -25
          0 - - - - - 0                     0 - - - - - 0
         / \    2    / \                   / \   x24=25
        /   \       /   \                 /   \
      2/    2\     /1    \2        x12=40/     \x23=50
      /       \   /       \             /       \
     /    5    \ /    1    \           /         \    x35=20
    0 - - - - - 0 - - - - - 0         0           0 - - - - - 0
   +40         -30         -20       +40         -30         -20
  Nod 1       Nod 3       Nod 5
```

Då kan simplexmultiplikatorerna y_i för noderna beräknas med hjälp av ekvationerna $y_5 = 0$ och $y_i - y_j = c_{ij}$ för alla trädbågar (i, j) (dvs basvariabelbågar).
De resulterande värdena y_i är utskrivna i den vänstra figuren nedan.

Därefter beräknas reducerade kostnaderna r_{ij} för alla icke-trädbågar med hjälp av uttrycket $r_{ij} = c_{ij} - y_i + y_j$. De resulterande värdena r_{ij} är utskrivna i högra figuren nedan

```
        y2=3        y4=1                    y2=3        y4=1
         0 - - - - - 0                       0           0
        / \   c24=2                                     / \
       /   \                                           /   \
  c12=2/     \c23=2                   r34=1-1+1=1/     \r45=2-1+0=1
     /       \                                      /       \
    /         \     c35=1           r13=5-5+1=1 /         \
   0           0 - - - - - 0           0 - - - - - 0           0
  y1=5        y3=1        y5=0        y1=5        y3=1        y5=0
```

Eftersom alla $r_{ij} \geq 0$ så är den föreslagna lösningen $\hat{\mathbf{x}}$ optimal.

2.(a)

Om vi inför slackvariabler x_4 och x_5, för att överföra olikhetsbivillkoren till likhetsbivillkor, så får vi ett LP-problem på standardformen

$$\begin{aligned} \text{minimera} \quad & \mathbf{c}^{\mathsf{T}}\mathbf{x} \\ \text{då} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\,, \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\,, \end{aligned}$$

där $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $\mathbf{c}^{\mathsf{T}} = (\,3, -1,\, 2,\, 0,\, 0)$.

Startlösningen ska ha basvariablerna x_4 och x_5, dvs $\beta = (4,5)$ och $\delta = (1,2,3)$.

Motsvarande basmatris ges av $\mathbf{A}_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, medan $\mathbf{A}_\delta = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$.

Basvariablernas värden i baslösningen ges av $\mathbf{x}_\beta = \bar{\mathbf{b}}$, där vektorn $\bar{\mathbf{b}}$ beräknas ur ekvationssystemet $\mathbf{A}_\beta \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{b}$,

dvs $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, med lösningen $\bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Vektorn $\mathbf{y}$ med simplexmultiplikatorerna värden erhålls ur systemet $\mathbf{A}_\beta^{\mathsf{T}}\mathbf{y} = \mathbf{c}_\beta$,

dvs $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, med lösningen $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Reducerade kostnaderna för icke-basvariablerna ges av

$\mathbf{r}_\delta^{\mathsf{T}} = \mathbf{c}_\delta^{\mathsf{T}} - \mathbf{y}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}_\delta = (\,3, -1,\, 2) - (0,\, 0) \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = (\,3, -1,\, 2)$.

Eftersom $r_{\delta_2} = r_2 = -1$ är minst, och < 0, ska vi låta x_2 bli ny basvariabel.

Då behöver vi beräkna vektorn $\bar{\mathbf{a}}_2$ ur systemet $\mathbf{A}_\beta \bar{\mathbf{a}}_2 = \mathbf{a}_2$,

dvs $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a}_{12} \\ \bar{a}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, med lösningen $\bar{\mathbf{a}}_2 = \begin{pmatrix} \bar{a}_{12} \\ \bar{a}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Det största värde som den nya basvariabeln x_1 kan ökas till ges av

$$t^{\max} = \min_i \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{i2}} \mid \bar{a}_{i2} > 0 \right\} = \frac{\bar{b}_1}{\bar{a}_{12}} = \frac{2}{1}.$$

Minimerande index är $i = 1$, varför $x_{\beta_1} = x_4$ inte längre får vara kvar som basvariabel. Dess plats tas av x_2.

Nu är alltså $\beta = (2,5)$ och $\delta = (1,4,3)$.

Motsvarande basmatris ges av $\mathbf{A}_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, medan $\mathbf{A}_\delta = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Basvariablernas värden i baslösningen ges av $\mathbf{x}_\beta = \bar{\mathbf{b}}$, där vektorn $\bar{\mathbf{b}}$ beräknas ur ekvationssystemet $\mathbf{A}_\beta \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{b}$,

dvs $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, med lösningen $\bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Vektorn $\mathbf{y}$ med simplexmultiplikatorerna värden erhålls ur systemet $\mathbf{A}_\beta^\mathsf{T}\mathbf{y} = \mathbf{c}_\beta$,

dvs $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, med lösningen $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Reducerade kostnaderna för icke-basvariablerna ges av

$$\mathbf{r}_\delta^\mathsf{T} = \mathbf{c}_\delta^\mathsf{T} - \mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{A}_\delta = (3,\, 0,\, 2) - (-1, 0) \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = (1,\, 1,\, 1).$$

Eftersom $\mathbf{r}_\delta \geq \mathbf{0}$ så är den aktuella baslösningen optimal.

Därmed är punkten $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = 0$ optimal till det ursprungliga problemet. Optimalvärdet är $z = -2$.

2.(b)

Antag nu att $\mathbf{c}^\mathsf{T} = (\,1, -1,\, 2,\, 0,\, 0)$ i stället för $(\,3, -1,\, 2,\, 0,\, 0)$.

Första iterationen blir likadan som första iterationen i (a)-uppgiften, så att vi efter den iterationen kommer till läget $\beta = (2, 5)$ och $\delta = (1, 4, 3)$, med

$$\mathbf{A}_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},\ \mathbf{A}_\delta = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix},\ \bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ och } \mathbf{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Men reducerade kostnaderna för icke-basvariablerna ges nu av

$$\mathbf{r}_\delta^\mathsf{T} = \mathbf{c}_\delta^\mathsf{T} - \mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{A}_\delta = (1,\, 0,\, 2) - (-1, 0) \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = (-1,\, 1,\, 1).$$

Eftersom $r_{\delta_1} = r_1 = -1$ är minst, och < 0, ska vi låta x_1 bli ny basvariabel.

Då behöver vi beräkna vektorn $\bar{\mathbf{a}}_1$ ur systemet $\mathbf{A}_\beta \bar{\mathbf{a}}_1 = \mathbf{a}_1$,

dvs $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} \\ \bar{a}_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, med lösningen $\bar{\mathbf{a}}_1 = \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} \\ \bar{a}_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Eftersom $\bar{\mathbf{a}}_1 \leq \mathbf{0}$ så kan x_1 öka obegränsat, varvid målfunktionsvärdet går mot $-\infty$. Därmed saknar problemet ändligt optimalvärde och algoritmen avbryts.

2.(c)

Om man i (b)-uppgiften ovan sätter $x_1 = t$ och låter t öka från 0, medan de övriga ickebasvariablerna ligger kvar vid 0, så påverkas målfunktionen enligt $z = \bar{z} + r_1 t = -2 - t$, medan basvariablernas värden påverkas enligt $\mathbf{x}_\beta = \bar{\mathbf{b}} - \bar{\mathbf{a}}_1 t$, dvs $\begin{pmatrix} x_2 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} - t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$$\text{Detta kan skrivas } \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \\ x_5(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{x}_0 + t \cdot \mathbf{d}.$$

Då är $\mathbf{A}\mathbf{x}(t) = \mathbf{b}$ och $\mathbf{x}(t) \geq \mathbf{0}$ för alla $t \geq 0$, dvs $\mathbf{x}(t)$ är en tillåten lösning för varje $t \geq 0$,

medan $\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x}(t) = \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x}_0 + t \cdot \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{d} = -2 - t \to -\infty$ då $t \to +\infty$.

Speciellt med $t = 1000$ så erhålls den tillåtna lösningen $\bar{\mathbf{x}} = (1000,\, 2002,\, 0,\, 0,\, 1003)$ med målfunktionsvärdet $\mathbf{c}^\mathsf{T}\tilde{\mathbf{x}} = -1002 < -1000$.

2.(d)

Om primala problemet är på standardformen

$$\begin{array}{rl} \text{minimera} & \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} \\ \text{då} & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \end{array}$$

så är det duala problemet på formen: maximera $\mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{y}$ då $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{y} \leq \mathbf{c}$,
som för det primala problemet P1 i (a)-uppgiften, överfört till standardform,
ger följande duala problem:

$$\begin{array}{rrcrcr} \text{maximera} & 2y_1 & + & y_2 & & \\ \text{då} & -2y_1 & + & y_2 & \leq & 3, \\ & y_1 & - & y_2 & \leq & -1, \\ & -y_1 & - & y_2 & \leq & 2, \\ & y_1 & & & \leq & 0, \\ & & & y_2 & \leq & 0. \end{array}$$

Om man ritar upp det tillåtna området till detta problem i en figur med y_1 och y_2 på axlarna så ser man att det blir en fyrhörning med hörnen i punkterna $(-3/2,\, 0)$, $(-5/3,\, -1/3)$, $(-3/2,\, -1/2)$ och $(-1,\, 0)$.
Vidare ser man, genom att rita några nivålinjer till målfunktionen $2y_1 + y_2$, att den optimala lösningen till detta duala problem är $\hat{\mathbf{y}} = (-1,\, 0)^\mathsf{T}$, med optimalvärdet -2.

För det primala problemet P2 i (b)-uppgiften, överfört till standardform, erhålls följande duala problem, där högerledet i första bivillkoret nu är 1 i stället för 3:

$$\begin{array}{rrcrcr} \text{maximera} & 2y_1 & + & y_2 & & \\ \text{då} & -2y_1 & + & y_2 & \leq & 1, \\ & y_1 & - & y_2 & \leq & -1, \\ & -y_1 & - & y_2 & \leq & 2, \\ & y_1 & & & \leq & 0, \\ & & & y_2 & \leq & 0. \end{array}$$

Om man ritar upp det tillåtna området till detta problem i en figur med y_1 och y_2 på axlarna så ser man att det inte finns något $\mathbf{y}$ som samtidigt uppfyller $-2y_1 + y_2 \leq 1$, $y_1 - y_2 \leq -1$ och $y_2 \leq 0$.
Därmed saknar det duala problemet tillåtna lösningar, vilket överensstämmer med dualitetssatsen för LP eftersom det primala problemet P2 hade tillåtna lösningar men saknade (ändlig) optimallösning.

3.(a)

Att minimera $\frac{1}{2}\|\,\mathbf{A}\mathbf{x}-\mathbf{b}\,\|^2$ är ekvivalent med att lösa normalekvationerna $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{b}$.

Eftersom $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 6\end{bmatrix}$ och $\mathbf{b}=\begin{pmatrix}100\\200\end{pmatrix}$ så blir $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}=\begin{bmatrix}10 & 20\\ 20 & 40\end{bmatrix}$ och $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{b}=\begin{pmatrix}700\\1400\end{pmatrix}$.

Allmänna lösningen till systemet $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{b}$ ges då av

$\mathbf{x}=\begin{pmatrix}70\\0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ för godtyckliga värden på parametern $t\in I\!R$.

3.(b)

Vi ska nu minimera $\frac{1}{2}\|\,\mathbf{x}\,\|^2$ då $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{b}$, dvs bestämma minsta-normlösningen (MN-lösningen) till minsta-kvadratprolemet (MK-problemet) i (a)-uppgiften ovan.

Låt $\bar{\mathbf{x}}$ vara en lösning till $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{b}$, och låt $\bar{\mathbf{u}}$ vara en lösning till $\mathbf{A}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{u}=\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}$.
Då ges som bekant MN-lösningen till MK-problemet av $\hat{\mathbf{x}}=\mathbf{A}^\mathsf{T}\bar{\mathbf{u}}$.

En lösning till normalekvationerna är enligt ovan t ex $\bar{\mathbf{x}}=\begin{pmatrix}70\\0\end{pmatrix}$, med $\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}=\begin{pmatrix}70\\210\end{pmatrix}$.

Vidare är $\mathbf{A}\mathbf{A}^\mathsf{T}=\begin{bmatrix}5 & 15\\ 15 & 45\end{bmatrix}$. Allmänna lösningen till systemet $\mathbf{A}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{u}=\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}$ ges då av

$\mathbf{u}=\begin{pmatrix}14\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$ för godtyckliga värden på parametern $s\in I\!R$.

Vi kan då välja exempelvis $\bar{\mathbf{u}}=\begin{pmatrix}14\\0\end{pmatrix}$, varur följer att $\hat{\mathbf{x}}=\mathbf{A}^\mathsf{T}\bar{\mathbf{u}}=\begin{pmatrix}14\\28\end{pmatrix}$ är den sökta minsta-normlösning till minsta-kvadratproblemet.

3.(c)

Vi ska nu lösa problemet att minimera $\frac{1}{2}\|\,\mathbf{y}-\mathbf{b}\,\|^2$ då $\mathbf{y}\in\mathcal{R}(\mathbf{A})$.

Men att $\mathbf{y}\in\mathcal{R}(\mathbf{A})$ är ekvivalent med att $\mathbf{y}=\mathbf{A}\mathbf{x}$ för någon vektor $\mathbf{x}\in I\!R^2$,
så vårt problem här är ekvivalent med problemet i (a)-uppgiften ovan!

Enligt ovan är varje vektor på formen $\mathbf{x}=\begin{pmatrix}70\\0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$, med $t\in I\!R$,
en optimal lösning till problemet i (a)-uppgiften.

För samtliga dessa optimala lösningar är $\mathbf{A}\mathbf{x}=\begin{pmatrix}70\\210\end{pmatrix}$, så $\hat{\mathbf{y}}=\begin{pmatrix}70\\210\end{pmatrix}$
är den unika optimala lösningen till problemet i denna (c)-uppgift.

4.(a)

Låt de fyra givna punkterna heta (a_i, b_i), $i = 1, 2, 3, 4$, och låt (x, y) vara de sökta koordinaterna för den femte punkten. Då kan problemet formuleras:

minimera $f(x,y) = \sum_{i=1}^{4} \sqrt{(x-a_i)^2 + (y-b_i)^2}$, utan några bivillkor.

4.(b)

Derivering ger följande, där $r_i = \sqrt{(x-a_i)^2 + (y-b_i)^2}$,
och där vi förutsätter att $(x, y) \neq (a_i, b_i)$ för $i = 1, 2, 3, 4$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \sum_i \frac{x-a_i}{r_i}\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \sum_i \frac{y-b_i}{r_i}\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \sum_i \frac{(y-b_i)^2}{r_i^3}\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \sum_i \frac{(x-a_i)^2}{r_i^3}$$

och $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\sum_i \dfrac{(x-a_i)(y-b_i)}{r_i^3}$.

Med $(a_1, b_1) = (6, 8)$, $(a_2, b_2) = (-6, 8)$, $(a_3, b_3) = (-8, -6)$, $(a_4, b_4) = (8, -6)$

och $(x^{(1)}, y^{(1)}) = (0, 0)$ blir $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = 10$ samt

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -0.4, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0.2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0,$$

så Hessianen är en diagonalmatris med strikt positiva diagonalelement,
dvs en positivt definit matris.
Därmed bestäms Newtonriktningen $\mathbf{d}^{(1)} = (d_x^{(1)}, d_y^{(1)})^{\mathsf{T}}$ ur ekvationssystemet

$$\begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} d_x \\ d_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.4 \end{pmatrix}, \text{ med lösningen } \mathbf{d}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Vi prövar ett steg med $t_1 = 1$, så att $(x^{(2)}, y^{(2)})^{\mathsf{T}} = (0,\ 2)^{\mathsf{T}}$.

Då blir $f(x^{(2)}, y^{(2)}) = 28\sqrt{2} = \sqrt{1568}$, medan $f(x^{(1)}, y^{(1)}) = 40 = \sqrt{1600}$.

Eftersom $f(x^{(2)}, y^{(2)}) < f(x^{(1)}, y^{(1)})$ accepterar vi denna nya iterationspunkt,
och Newton-iterationen är klar.

4.(c)

Om man i stället ska minimera summan av kvadraterna på avstånden
kan problemet skrivas

minimera $f(x,y) = \sum_{i=1}^{4} (\,(x-a_i)^2 + (y-b_i)^2)$, utan några bivillkor.

Nu är målfunktionen en kvadratisk funktion som kan skriva

$$f(x,y) = \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^{\mathsf{T}} \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \end{pmatrix}^{\mathsf{T}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c_0,$$

där $c_x = -2\sum_i a_i$, $c_y = -2\sum_i b_i$ och $c_0 = \sum_i (a_1^2 + b_i^2)$.

Eftersom Hessianen är en diagonalmatris med strikt positiva diagonalelement, dvs en positivt definit matris, så bestäms den unika optimala lösningen ur ekvationssystemet

$$\begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} c_x \\ c_y \end{pmatrix}, \text{ med lösningen } \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} c_x/8 \\ c_y/8 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{4} \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix}.$$

För de i uppgiften givna punkterna blir $(\hat{x}, \hat{y}) = (0, 1)$.

5.(a)

Lagrangefunktionen kan skrivas $L(\mathbf{x},\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + \sum_j y_j g_j(\mathbf{x}) =$

$$= \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{x} + \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} + \sum_{j=1}^{5} y_j(x_j^2 - 1) \;=\; \sum_{j=1}^{5}((1+y_j)x_j^2 + c_j x_j - y_j).$$

KKT-villkoren tillämpade på detta exempel innebär därför att följande fyra villkor ska gälla för varje $j = 1, \dots, 5$:

(KKT–1) $\dfrac{\partial L}{\partial x_j} = 0$, dvs $2(1+y_j)x_j + c_j = 0$.

(KKT–2) Tillåten punkt, dvs $x_j^2 - 1 \le 0$.

(KKT–3) Lagrangemultiplikatorerna icke-negativa, dvs $y_j \ge 0$.

(KKT–4) Komplementaritet, dvs $y_j(x_j^2 - 1) = 0$, dvs $y_j(x_j - 1)(x_j + 1) = 0$.

5.(b)

Vi kan analysera ovanstående KKT-villkor separat för varje enskilt index j.
För varje j har vi två fall: $y_j = 0$ och $y_j > 0$.

Fall 1: $y_j = 0$.
Då är (KKT–3) och (KKT–4) uppfyllda. Vidare ger (KKT–1) att $x_j = -c_j/2$, som uppfyller (KKT–2) om och endast om $-2 \le c_j \le 2$.

Fall 2: $y_j > 0$.
Då är (KKT–3) uppfyllt. (KKT–4) ger att $x_j = 1$ eller -1, som båda uppfyller (KKT–2).
Om $x_j = 1$ så medför (KKT–1) att $y_j = -(c_j + 2)/2$,
som uppfyller $y_j > 0$ om och endast om $c_j < -2$.
Om $x_j = -1$ så medför (KKT–1) att $y_j = (c_j - 2)/2$,
som uppfyller $y_j > 0$ om och endast om $c_j > 2$.

Sammanfattningsvis ger detta att
Om $-2 \le c_j \le 2$ så uppfylls (KKT–1)–(KKT–4) av $\hat{x}_j = -\dfrac{c_j}{2}$ och $\hat{y}_j = 0$.
Om $c_j < -2$ så uppfylls (KKT–1)–(KKT–4) av $\hat{x}_j = 1$ och $\hat{y}_j = \dfrac{-c_j - 2}{2}$.
Om $c_j > 2$ så uppfylls (KKT–1)–(KKT–4) av $\hat{x}_j = -1$ och $\hat{y}_j = \dfrac{c_j - 2}{2}$.

Speciellt om $\mathbf{c} = (2.4,\ 1.6,\ 0,\ -1.8,\ -2.6)^\mathsf{T}$ så uppfylls samtliga KKT-villkor av $\hat{\mathbf{x}} = (-1,\ -0.8,\ 0,\ 0.9,\ 1)^\mathsf{T}$ och $\hat{\mathbf{y}} = (0.2,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0.3)^\mathsf{T}$.

5.(c)

Målfunktionen är en kvadratisk funktion vars Hessian är en diagonalmatris med samtliga diagonalelement $= 2$, vilket medför att Hessianen är positivt definit, vilket i sin tur medför att målfunktionen är strikt konvex.

Den j:te bivillkorsfunktionen $x_j^2 - 1$ är en kvadratisk funktion vars Hessian är en diagonalmatris med det j:te diagonalelementet $= 2$ och övriga diagonalelement $= 0$, vilket medför att Hessianen är positivt semidefinit, vilket i sin tur medför att bivillkorsfunktionen är konvex.

Vi har alltså ett konvext problem, och då är som bekant varje punkt $\hat{\mathbf{x}}$ som uppfyller KKT-villkoren en globalt optimal lösning.