Lösningar till SF1861/SF1851 Optimeringslära, 3/6 2014

Uppgift 1.(a)

Problemet är ett minkostnadsflödesproblem med 6 st noder F1, F2, K1, K2, K3, K4,
här kallade 1,2,3,4,5,6,
samt 8 st bågar (F1,K1), (F1,K2), (F1,K3), (F1,K4), (F2,K1), (F2,K2), (F2,K3), (F2,K4),
här kallade (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6).

Den föreslagna lösningen svarar mot ett uppspännande träd i nätverket, bestående av bågarna (1,3), (1,4), (2,4), (2,5) och (2,6), dvs mot en baslösning till problemet.
Det är en tillåten baslösning, ty balansekvationerna är uppfyllda i alla noder och inga variabler är negativa.

Man beräknar simplexmultiplikatorer y_i ur villkoren $y_i - y_j = c_{ij}$ för basvariabler (dvs trädbågar), samt $y_6 = 0$. Det ger att $y = (5,\, 3, -2, -1, -2,\, 0)$.
Därefter beräknas reducerade kostnader för icke-basvariabler ur $r_{ij} = c_{ij} - y_i + y_j$.

Det ger att $r_{15} = 8 - 5 + (-2) = 1,\;\; r_{16} = 6 - 5 + 0 = 1,\;\; r_{23} = 6 - 3 + (-2) = 1.$

Eftersom alla $r_{ij} \geq 0$ är den föreslagna lösningen optimal.

Uppgift 1.(b)

Vi söker baser till underrummen $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ och $\mathcal{N}(\mathbf{A})^{\perp}$.
Men $\mathcal{N}(\mathbf{A})^{\perp} = \mathcal{R}(\mathbf{A}^{\mathsf{T}})$, och $\mathcal{R}(\mathbf{A}^{\mathsf{T}}) = \mathcal{R}(\mathbf{A})$, eftersom den givna matrisen är symmetrisk, så vi söker därför baser till underrummen $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ och $\mathcal{R}(\mathbf{A})$.
Först använder vi Gauss–Jordans metod för att överföra $\mathbf{A}$ till trappstegsform:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{T}.$$

Nu är $\mathbf{A}$ överförd till trappstegsform med *tre trappstegsettor*.
En bas till $\mathcal{R}(\mathbf{A})$ erhålls genom att som basvektorer välja de kolonner i $\mathbf{A}$ som svarar mot trappstegsettor i $\mathbf{T}$, dvs kolonnerna nummer 1, 2 och 3 i $\mathbf{A}$.

De tre vektorerna $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ utgör alltså en bas till $\mathcal{N}(\mathbf{A})^{\perp} = \mathcal{R}(\mathbf{A}^{\mathsf{T}})$.

Nu till nollrummet. De bägge ekvationssystemet $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ och $\mathbf{Tx} = \mathbf{0}$ har exakt samma lösningsmängd, eftersom de enkla radoperationerna inte ändrar denna.

Men den allmänna lösningen till $\mathbf{Tx} = \mathbf{0}$ erhålls genom att först sätta den variabel som inte svarar mot trappstegsettor, dvs x_4, till ett godtyckliga tal t och därefter bestämma hur "trappstegsvariablerna" x_1, x_2 och x_3 måste bero av t för att $\mathbf{Tx} = \mathbf{0}$ ska bli uppfyllt.

Detta ger att den allmänna lösningen till $\mathbf{Tx} = \mathbf{0}$, och därmed även till $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$, är
$x_1 = t,\ \ x_2 = t,\ \ x_3 = t,\ \ x_4 = t$, som kan skrivas

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$ vilket medför att vektorn $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ utgör en bas till $\mathcal{N}(\mathbf{A})$.

Vektorn $(6, -3, -2, -1)^{\mathsf{T}}$ ligger inte i $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ ty det finns inget värde på t som gör att $(6, -3, -2, -1)^{\mathsf{T}} = t \cdot (1,\, 1,\, 1,\, 1)^{\mathsf{T}}$.

Däremot ligger vektorn $(6, -3, -2, -1)^{\mathsf{T}}$ i $\mathcal{N}(\mathbf{A})^{\perp}$ eftersom den är ortogonal mot basvektorn $(1,\, 1,\, 1,\, 1)^{\mathsf{T}}$, och därmed ortogonal mot varje vektor i $\mathcal{N}(\mathbf{A})$.

Uppgift 2.(a)

Inför slackvariabler x_4, x_5 och x_6 så att problemet blir på standardformen

$$\begin{aligned} \text{minimera} \quad & \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} \\ \text{då} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \end{aligned}$$

där $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ och $\mathbf{c} = (1,\ 1,\ 4,\ 0,\ 0,\ 0)^\mathsf{T}$.

I startlösningen ska enligt uppgiftslydelsen x_1, x_2 och x_3 vara basvariabler, dvs $\beta = (1, 2, 3)$ och $\delta = (4, 5, 6)$.

Motsvarande basmatris ges av $\mathbf{A}_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Basvariablernas värden i baslösningen ges av $\mathbf{x}_\beta = \bar{\mathbf{b}}$, där vektorn $\bar{\mathbf{b}}$ beräknas ur ekvationssystemet $\mathbf{A}_\beta \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{b}$,

dvs $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \\ \bar{b}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, med lösningen $\bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \\ \bar{b}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Här använde vi den givna räknehjälpen.

Vektorn $\mathbf{y}$ med simplexmultiplikatorerna värden erhålls ur systemet $\mathbf{A}_\beta^\mathsf{T} \mathbf{y} = \mathbf{c}_\beta$,

dvs $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, med lösningen $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Här använde vi igen den givna räknehjälpen.

Reducerade kostnaderna för icke-basvariablerna ges av $\mathbf{r}_\delta^\mathsf{T} = \mathbf{c}_\delta - \mathbf{y}^\mathsf{T} \mathbf{A}_\delta =$

$= (0,\ 0,\ 0) - (-1,\ 2,\ 2) \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = (-1,\ 2,\ 2)$.

Eftersom $r_{\delta_1} = r_4 = -1$ är minst, och < 0, ska vi låta x_4 bli ny basvariabel.

Då behöver vi beräkna vektorn $\bar{\mathbf{a}}_4$ ur systemet $\mathbf{A}_\beta \bar{\mathbf{a}}_4 = \mathbf{a}_4$,

dvs $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a}_{14} \\ \bar{a}_{24} \\ \bar{a}_{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, med lösningen $\bar{\mathbf{a}}_4 = \begin{pmatrix} \bar{a}_{14} \\ \bar{a}_{24} \\ \bar{a}_{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.5 \\ -0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$.

Här använde vi igen den givna räknehjälpen.

Det största värde som den nya basvariabeln x_4 kan ökas till ges av

$$t^{\max} = \min_i \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{i4}} \mid \bar{a}_{i4} > 0 \right\} = \frac{\bar{b}_3}{\bar{a}_{34}} = \frac{2}{0.5}\ .$$

Minimerande index är $i = 3$, varför $x_{\beta_3} = x_3$ inte längre får vara kvar som basvariabel.

Nu är alltså $\beta = (1, 2, 4)$ och $\delta = (3, 5, 6)$.

Motsvarande basmatris ges av $\mathbf{A}_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Basvariablernas värden i baslösningen ges av $\mathbf{x}_\beta = \bar{\mathbf{b}}$, där vektorn $\bar{\mathbf{b}}$ beräknas ur ekvationssystemet $\mathbf{A}_\beta \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{b}$,

dvs $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \\ \bar{b}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, med lösningen $\bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \\ \bar{b}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Vektorn $\mathbf{y}$ med simplexmultiplikatorernas värden erhålls ur systemet $\mathbf{A}_\beta^\mathsf{T} \mathbf{y} = \mathbf{c}_\beta$,

dvs $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, med lösningen $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Reducerade kostnaderna för icke-basvariablerna ges av $\mathbf{r}_\delta^\mathsf{T} = \mathbf{c}_\delta - \mathbf{y}^\mathsf{T} \mathbf{A}_\delta =$

$= (4,\ 0,\ 0) - (0,\ 1,\ 1) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = (2,\ 1,\ 1)$.

Eftersom $\mathbf{r}_\delta \geq \mathbf{0}$ så är den aktuella baslösningen optimal.
Alltså är punkten $x_1 = 2$, $x_2 = 2$, $x_3 = 0$, $x_4 = 2$, $x_5 = 0$, $x_6 = 0$ optimal.
Optimalvärdet är $\mathbf{c}^\mathsf{T} \mathbf{x} = 4$.

Uppgift 2.(b)
Om primala problemet är på standardformen

$$\begin{aligned} \text{minimera} \quad & \mathbf{c}^\mathsf{T} \mathbf{x} \\ \text{då} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \end{aligned}$$

så är det duala problemet

$$\text{maximera } \mathbf{b}^\mathsf{T} \mathbf{y} \ \text{ då } \mathbf{A}^\mathsf{T} \mathbf{y} \leq \mathbf{c},$$

som utskrivet blir:

$$\begin{aligned} \text{maximera} \quad & 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 \\ \text{då} \quad & y_1 + y_2 \leq 1, \\ & y_1 + y_3 \leq 1, \\ & y_2 + y_3 \leq 4, \\ & -y_1 \leq 0, \\ & -y_2 \leq 0, \\ & -y_3 \leq 0. \end{aligned}$$

Det är välkänt att en optimal lösning till detta duala problem ges av vektorn $\mathbf{y}$ med "simplexmultiplikatorerna" i optimala baslösningen i (a)-uppgiften, dvs $\mathbf{y} = (0,\ 1,\ 1)^\mathsf{T}$.
Man kontrollerar snabbt att detta är en tillåten lösning till det duala problemet.
Vidare är optimalvärdet $\mathbf{b}^\mathsf{T} \mathbf{y} = 4 =$ optimalvärdet för det primala problemet ovan.

Uppgift 3.

Gradienten till f ges av $\nabla f(\mathbf{x}) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \dfrac{\partial f}{\partial x_2}, \dfrac{\partial f}{\partial x_3}\right)$, där $\dfrac{\partial f}{\partial x_j} = 4x_j^3 + 3x_j^2 + 2x_j + 1$.

Hessianen till f ges av $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} \end{bmatrix}$, där $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} = 12x_j^2 + 6x_j + 2$.

(b) f är konvex på $\mathbb{R}^3$ om och endast om $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ är positivt semidefinit för alla $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$. En diagonalmatris är positivt semidefinit om och endast om alla diagonalelement är ≥ 0.

Men $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} = 12(x_j^2 + \frac{1}{2}x_j + \frac{1}{6}) = 12((x_j + \frac{1}{4})^2 - \frac{1}{16} + \frac{1}{6}) > 0$,
så $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ positivt definit för alla $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$. Därmed är f (strikt) konvex på $\mathbb{R}^3$.

(a) Startpunkten ges enligt uppgift av $\mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Förutsatt att $\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(1)})$ är positivt definit, vilket den alltid är enligt ovan, så bestäms första Newtonriktningen $\mathbf{d}^{(1)}$ som lösningen till ekvationssystemet $\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(1)})\mathbf{d} = -\nabla f(\mathbf{x}^{(1)})^{\mathsf{T}}$, dvs

$\begin{bmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \mathbf{d} = -\begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, med den unika lösningen $\mathbf{d}^{(1)} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1/4 \end{pmatrix}$.

Vi prövar först steget $t_1 = 1$, så att $\mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{x}^{(1)} + t_1\mathbf{d}^{(1)} = \mathbf{x}^{(1)} + \mathbf{d}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ -3/4 \end{pmatrix}$.

Då blir $f(\mathbf{x}^{(2)}) = 85/256 < 4 = f(\mathbf{x}^{(1)})$, så steget $t_1 = 1$ accepteras.

Därmed har vi utfört en fullständig iteration med Newtons metod och erhållit iterationspunkten $\mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ -3/4 \end{pmatrix}$ med $f(\mathbf{x}^{(2)}) = 85/256$.

(c) Här kommer en möjlig underskattning:

Först konstateras att $x_j^2 + x_j = (x_j + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} \geq -\frac{1}{4}$.

Därav följer att $x_j^4 + x_j^3 = x_j^2(x_j^2 + x_j) \geq -\frac{1}{4}\,x_j^2$, ur vilket i sin tur följer att

$x_j^4 + x_j^3 + x_j^2 + x_j \geq -\frac{1}{4}\,x_j^2 + x_j^2 + x_j = \frac{3}{4}(x_j^2 + \frac{4}{3}x_j) = \frac{3}{4}((x_j + \frac{2}{3})^2 - \frac{4}{9}) \geq= \frac{3}{4}(-\frac{4}{9}) = -\frac{1}{3}$.

Detta gäller för varje j, så vi får att

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{3}(x_j^4 + x_j^3 + x_j^2 + x_j) \geq -\frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = -1.$$

$L = -1$ är alltså en underskattning, men kanske inte den högsta möjliga.

Uppgift 4.

Eftersom alla $c_j = 10^{-3}$ så är töjningsenergiminimeringsproblemet ekvivalent med QP-problemet

$$\begin{array}{rl} \text{minimera} & \tfrac{1}{2}\,\mathbf{f}^{\mathsf{T}}\mathbf{H}\,\mathbf{f} \\ \text{då} & \mathbf{R}\,\mathbf{f} = \mathbf{p}\,, \end{array}$$

där $\mathbf{H} = 10^{-3} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{R} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$, $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 12 \end{pmatrix}$.

Matrisen $\mathbf{H}$ är positivt definit, ty den är en diagonalmatris med alla diagonalelement > 0.

Därmed är QP-problemet ekvivalent med det linjära ekvationssystemet

$$\begin{array}{rcrcl} \mathbf{H}\,\mathbf{f} & - & \mathbf{R}^{\mathsf{T}}\mathbf{u} & = & \mathbf{0}, \\ \mathbf{R}\,\mathbf{f} & & & = & \mathbf{p}. \end{array}$$

Ur $\mathbf{H}\,\mathbf{f} - \mathbf{R}^{\mathsf{T}}\mathbf{u} = \mathbf{0}$ erhålls att $\mathbf{f} = 10^3 \cdot \mathbf{R}^{\mathsf{T}}\mathbf{u}$,

som insatt i $\mathbf{R}\,\mathbf{f} = \mathbf{p}$ ger ekvationssystemet $10^3 \cdot \mathbf{R}\mathbf{R}^{\mathsf{T}}\mathbf{u} = \mathbf{p}$, dvs

$10^3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 12 \end{pmatrix}$, med lösningen $\mathbf{u} = 10^{-3} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Normalkrafterna i stängerna ges sedan av

$$\hat{\mathbf{f}} = 10^3 \cdot \mathbf{R}^{\mathsf{T}}\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \\ 4\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Med den givna lastvektorn blev det alltså dragkraft i alla fem stängerna.

Uppgift 5.(a) Rektangelproblemet kan skrivas

$$\begin{aligned} \text{minimera} \quad & f(\mathbf{x}) = -4x_1x_2 \\ \text{då} \quad & h(\mathbf{x}) = \frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} - 1 = 0. \end{aligned}$$

Vi förutsätter att x_1 och x_2 är > 0, men behandlar inte dessa villkor explicit i optimalitetsvillkoren. De blir naturligt uppfyllda ändå. Lagrangevillkoren för problemet blir:

$$\begin{aligned} -4x_2 + \frac{2\lambda x_1}{a_1^2} &= 0, \\ -4x_1 + \frac{2\lambda x_2}{a_2^2} &= 0, \\ \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Eftersom varje tillåten punkt också är en regulär punkt (gradienten till det enda bivillkoret är aldrig nollvektorn) så är dessa villkor nödvändiga för en optimal lösning.
Kalkyler ger att den enda lösningen (med $x_1 > 0$ och $x_2 > 0$) är

$x_1 = \dfrac{a_1}{\sqrt{2}}, \;\; x_2 = \dfrac{a_2}{\sqrt{2}}, \;\; u = 2a_1a_2$, med arean $4x_1x_2 = 2a_1a_2$.

(b) Lådproblemet kan skrivas

$$\begin{aligned} \text{minimera} \quad & f(\mathbf{x}) = -8x_1x_2x_3 \\ \text{då} \quad & h(\mathbf{x}) = \frac{x_1^2}{b_1^2} + \frac{x_2^2}{b_2^2} + \frac{x_3^2}{b_3^2} - 1 = 0. \end{aligned}$$

Vi förutsätter att x_1, x_2 och x_3 är > 0, men behandlar inte dessa villkor explicit i optimalitetsvillkoren. De blir naturligt uppfyllda ändå. Lagrangevillkoren för problemet blir:

$$\begin{aligned} -8x_2x_3 + \frac{2\lambda x_1}{b_1^2} &= 0 \\ -8x_3x_1 + \frac{2\lambda x_2}{b_2^2} &= 0 \\ -8x_1x_2 + \frac{2\lambda x_3}{b_3^2} &= 0 \\ \frac{x_1^2}{b_1^2} + \frac{x_2^2}{b_2^2} + \frac{x_3^2}{b_3^2} - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Eftersom varje tillåten punkt också är en regulär punkt (gradienten till det enda bivillkoret är aldrig nollvektorn) så är dessa villkor nödvändiga för en optimal lösning.
Kalkyler ger att den enda lösningen (med $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ och $x_3 > 0$) är

$x_1 = \dfrac{b_1}{\sqrt{3}}, \;\; x_2 = \dfrac{b_2}{\sqrt{3}}, \;\; x_3 = \dfrac{b_3}{\sqrt{3}}, \;\; u = 4b_1b_2b_3$, med volymen $8x_1x_2x_3 = \dfrac{8b_1b_2b_3}{3\sqrt{3}}$.