Lösningar till tentan i SF1861 Optimeringslära, 1 juni 2017

Lösningarna är på svenska, utom lösningen av 1.(a) som är på engelska.

1.(a) The considered network is illustrated in FIGURE 1 below, where the supply at the nodes are written in the figure. Negative supply means demand. The arc från Node 2 to Node 3 is directed from left to right. All other arc are directed downwards in the figure. The cost per unit flow is equal to 1 for all arcs.

The basic solution $\mathbf{x}$ corresponding to the spanning tree $T_1 = \{(1,2),(2,3),(2,4)\}$ is illustrated in FIGURE 2. It has been calculated as follows:
$x_{12} = 70$, due to the flow balance requirement in Node 1,
$x_{23} = 40$, due to the flow balance requirement in Node 3,
$x_{34} = 60$, due to the flow balance requirement in Node 2.
Then the flow balance requirement in Node 4 is also fulfilled,
Thus, the basic solution corresponding to T_1 is $\mathbf{x} = (70,\ 0,\ 40,\ 60,\ 0)^\mathsf{T}$,
which is a BFS since $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$. The objective value is $\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} = 70 + 40 + 60 = 170$.

```
         Node1                    Node1                    Node1
          70                       70                       70
           o                        o                        o
          / \                      /                          \
         /   \                    /                            \
        /     \                 70                              70
       /       \               /                                 \
Node2 /         \ Node3  Node2 /            Node3  Node2            \ Node3
  30 o---------->o -40     30 o--- 40 --->o -40     30 o             o -40
      \         /             \                         \           /
       \       /               \                         \         /
        \     /                 60                        30      30
         \   /                    \                         \   /
          \ /                      \                         \ /
           o                        o                         o
          -60                      -60                       -60
         Node4                    Node4                     Node4

        FIGURE 1                 FIGURE 2                  FIGURE 3
```

The basic solution $\mathbf{x}$ corresponding to the spanning tree $T_2 = \{(1,3),(2,4),(3,4)\}$ is illustrated in FIGURE 3. It has been calculated as follows:
$x_{13} = 70$, due to the flow balance requirement in Node 1,
$x_{24} = 30$, due to the flow balance requirement in Node 2,
$x_{34} = 30$, due to the flow balance requirement in Node 3.
Then the flow balance requirement in Node 4 is also fulfilled.
Thus, the basic solution corresponding to T_1 is $\mathbf{x} = (0,\ 70,\ 0,\ 30,\ 30)^\mathsf{T}$,
which is a BFS since $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$. The objective value is $\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} = 70 + 30 + 30 = 130$.

Since the objective value for the BFS corresponding to T_1 is larger than the the objective value for the BFS corresponding to T_2, the former can not be optimal. It remains to investigate if the latter is optimal:
The simplex multipliers y_i for the nodes are calculated by $y_4 = 0$ and $y_i - y_j = c_{ij}$ for all arcs (i, j) in the spanning tree. Using that $c_{ij} = 1$ for all arcs, the y_i are calculated in the order $y_4 = 0,\ y_3 = y_4 + c_{34} = 1,\ y_2 = y_4 + c_{24} = 1,\ y_1 = y_3 + c_{13} = 2.$
Then the reduced cost for the two non-basic variables are calculated by $r_{ij} = c_{ij} - y_i + y_j$, which give that $r_{12} = c_{12} - y_1 + y_2 = 1 - 2 + 1 = 0$ and $r_{23} = c_{23} - y_2 + y_3 = 1 - 1 + 1 = 1.$
Since both $r_{12} \geq 0$ and $r_{34} \geq 0$, the BFS corresponding to T_2 is an optimal solution.

The matrix $\mathbf{A}$ and the vector $\mathbf{b}$ in the LP formulation are:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 70 \\ 30 \\ -40 \\ -60 \end{pmatrix}.$$

where the flow balance equation for Node 4 (i.e. row 4 in $\mathbf{A}$ and $\mathbf{b}$) can be removed.

1.(b) Vektorn $\mathbf{w}$ tillhör bildrummet $\mathcal{R}(\mathbf{A})$ om och endast om ekvationssystemet $\mathbf{Ax} = \mathbf{w}$ har minst en lösning $\mathbf{x}$. Därför använder vi Gauss–Jordans metod på matrisen

$$[\mathbf{A}\ \ \mathbf{w}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & b \\ 1 & 3 & 4 & 7 & 2 \end{bmatrix}.$$

Addition av (-1) gånger rad 1 till rad 2 och (-1) gånger rad 1 till rad 3 ger matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & b-1 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Addition av (-1) gånger rad 2 till rad 1 och (-2) gånger rad 2 till rad 3 ger matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 2-b \\ 0 & 1 & 1 & 2 & b-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3-2b \end{bmatrix}.$$

Den tredje raden svarar mot ekvationen $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = 3-2b$,
som saknar lösning om $b \neq 3/2$.
Men om $b = 3/2$ så har ekvationssystemet exempelvis lösningen
$x_1 = 2-b = 1/2,\ x_2 = b-1 = 1/2,\ x_3 = x_4 = 0.$

Slutsats: $\mathbf{w} \in \mathcal{R}(\mathbf{A})$ om och endast om $b = 3/2$.

Vektorn $\mathbf{w}$ tillhör nollrummet för $\mathbf{A}^\mathsf{T}$, dvs $\mathbf{w} \in \mathcal{N}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$, om och endast om $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{w} = \mathbf{0}$.

Men $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+b \\ 7+2b \\ 10+3b \\ 17+5b \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ för varje värde på b.

(Ty $3+b = 0$ endast om $b = -3$, men då är $7+2b = 1 \neq 0$.)

Slutsats: Det finns inget värde på b som gör att $\mathbf{w} \in \mathcal{N}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$.

Uppgift 2.(a) Vi har ett LP-problem på standardformen

$$\begin{aligned} \text{minimera} \quad & \mathbf{c}^{\mathsf{T}}\mathbf{x} \\ \text{då} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\,, \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\,, \end{aligned}$$

där $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \end{pmatrix}$ och $\mathbf{c}^{\mathsf{T}} = (-8,\, 8, -4,\, 12, -1, -1)$.

Startlösningen ska ha basvariablerna x_5 och x_6, dvs $\beta = (5, 6)$ och $\delta = (1, 2, 3, 4)$.

Motsvarande basmatris ges av $\mathbf{A}_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, medan $\mathbf{A}_\delta = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

Basvariablernas värden i baslösningen ges av $\mathbf{x}_\beta = \bar{\mathbf{b}}$, där vektorn $\bar{\mathbf{b}}$ beräknas ur ekvationssystemet $\mathbf{A}_\beta \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{b}$,

dvs $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \end{pmatrix}$, med lösningen $\bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \end{pmatrix}$.

Vektorn $\mathbf{y}$ med simplexmultiplikatorerna värden erhålls ur systemet $\mathbf{A}_\beta^{\mathsf{T}} \mathbf{y} = \mathbf{c}_\beta$,

dvs $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, med lösningen $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Reducerade kostnaderna för icke-basvariablerna ges av

$\mathbf{r}_\delta^{\mathsf{T}} = \mathbf{c}_\delta^{\mathsf{T}} - \mathbf{y}^{\mathsf{T}} \mathbf{A}_\delta = (-8,\, 8, -4,\, 12) - (-1, -1) \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = (-6,\, 8, -4,\, 10)$.

Eftersom $r_{\delta_1} = r_1 = -6$ är minst, och < 0, ska vi låta x_1 bli ny basvariabel.

Då behöver vi beräkna vektorn $\bar{\mathbf{a}}_1$ ur systemet $\mathbf{A}_\beta \bar{\mathbf{a}}_1 = \mathbf{a}_1$,

dvs $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} \\ \bar{a}_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, med lösningen $\bar{\mathbf{a}}_1 = \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} \\ \bar{a}_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Det största värde som den nya basvariabeln x_1 kan ökas till ges av

$$t^{\max} = \min_i \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{i1}} \mid \bar{a}_{i1} > 0 \right\} = \min \left\{ \frac{200}{1},\, \frac{100}{1} \right\} = \frac{100}{1} = \frac{\bar{b}_2}{\bar{a}_{21}}.$$

Minimerande index är $i = 2$, varför $x_{\beta_2} = x_6$ inte längre får vara kvar som basvariabel. Dess plats tas av x_1.

Nu är alltså $\beta = (5, 1)$ och $\delta = (6, 2, 3, 4)$.

Motsvarande basmatris ges av $\mathbf{A}_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, medan $\mathbf{A}_\delta = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

Basvariablernas värden i baslösningen ges av $\mathbf{x}_\beta = \bar{\mathbf{b}}$, där vektorn $\bar{\mathbf{b}}$ beräknas ur ekvationssystemet $\mathbf{A}_\beta \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{b}$,

dvs $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \end{pmatrix}$, med lösningen $\bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \end{pmatrix}$.

Vektorn $\mathbf{y}$ med simplexmultiplikatorerna värden erhålls ur systemet $\mathbf{A}_\beta^\mathsf{T}\mathbf{y} = \mathbf{c}_\beta$,
dvs $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -8 \end{pmatrix}$, med lösningen $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \end{pmatrix}$.

Reducerade kostnaderna för icke-basvariablerna ges av
$\mathbf{r}_\delta^\mathsf{T} = \mathbf{c}_\delta^\mathsf{T} - \mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{A}_\delta = (-1,\, 8, -4,\, 12) - (-1, -7) \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = (6,\, 2,\, 2,\, 4).$

Eftersom $\mathbf{r}_\delta \geq \mathbf{0}$ så är den aktuella baslösningen optimal.

Därmed är punkten $x_1 = 100$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 100$, $x_6 = 0$
optimal till det betraktade problemet. Optimalvärdet är $z = -900$.

Uppgift 2.(b)

Antag nu att $\mathbf{c}^\mathsf{T} = (-8,\, 8, -4,\, 6, -1, -1)$ i stället för $\mathbf{c}^\mathsf{T} = (-8,\, 8, -4,\, 12, -1, -1)$.

Om vi startar med $\beta = (5, 6)$ och $\delta = (1, 2, 3, 4)$, så blir första iteration nästan identisk med första iterationen i (a)-uppgiften, endast skillnaden är att reducerade kostnaden för variabeln x_4 nu blir 4 i stället för 10, men det påverkar inte iterationen som även nu leder fram till den nya baslösningen med $\beta = (5, 1)$ och $\delta = (6, 2, 3, 4)$.

Men här blir det en väsentlig förändring jämfört med i (a), ty reducerade kostnaderna blir
nu $\mathbf{r}_\delta^\mathsf{T} = \mathbf{c}_\delta^\mathsf{T} - \mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{A}_\delta = (-1,\, 8, -4,\, 6) - (-1, -7) \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = (6,\, 2,\, 2, -2).$

Eftersom $r_{\delta_4} = r_4 = -2$ är minst, och < 0, ska vi låta x_4 bli ny basvariabel.

Då behöver vi beräkna vektorn $\bar{\mathbf{a}}_4$ ur systemet $\mathbf{A}_\beta \bar{\mathbf{a}}_4 = \mathbf{a}_4$,
dvs $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a}_{14} \\ \bar{a}_{24} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, med lösningen $\bar{\mathbf{a}}_4 = \begin{pmatrix} \bar{a}_{14} \\ \bar{a}_{24} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Men eftersom $\bar{\mathbf{a}}_4 \leq \mathbf{0}$ så kan x_4 öka obegränsat, varvid målfunktionsvärdet går mot $-\infty$.
Därför avbryts algoritmen med konstaterandet att det inte finns någon optimal lösning till problemet.

Uppgift 2.(c)

Om man i (b)-uppgiften ovan, med $\beta = (5, 1)$ och $\delta = (6, 2, 3, 4)$, sätter $x_4 = t$ och låter t öka från 0, medan de övriga ickebasvariablerna ligger kvar vid 0, så påverkas målfunktionen enligt $z = \bar{z} + r_4\, t = -900 - 2t$, medan basvariablernas värden påverkas enligt

$$\mathbf{x}_\beta = \bar{\mathbf{b}} - \bar{\mathbf{a}}_4 t, \;\; \text{dvs} \;\; \begin{pmatrix} x_5 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} t = \begin{pmatrix} 100 \\ 100{+}t \end{pmatrix}.$$

Speciellt om man sätter $\tilde{t} = 4050$ så blir $z = \bar{z} + r_4\, \tilde{t} = -900 - 2 \cdot 4050 = -9000$,

Motsvarande lösningsvektor är $\tilde{\mathbf{x}} = (100{+}\tilde{t},\, 0,\, 0,\, \tilde{t},\, 100,\, 0)^\mathsf{T} = (4150,\, 0,\, 0,\, 4050,\, 100,\, 0)^\mathsf{T}$.

Då är $\mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{b}$ och $\tilde{\mathbf{x}} \geq \mathbf{0}$, så $\tilde{\mathbf{x}}$ är en tillåten lösning till P2. Vidare är
$\mathbf{c}^\mathsf{T}\tilde{\mathbf{x}} = -8 \cdot 4150 + 6 \cdot 4050 - 1 \cdot 100 = -9000$, där vektorn $\mathbf{c}$ är den som hör till P2.

Uppgift 2.(d)

Om primala problemet är på standardformen

$$\begin{aligned} \text{minimera} \quad & \mathbf{c}^{\mathsf{T}}\mathbf{x} \\ \text{då} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \end{aligned}$$

så är det duala problemet på formen: maximera $\mathbf{b}^{\mathsf{T}}\mathbf{y}$ då $\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{y} \leq \mathbf{c}$.

Speciellt är det duala problemet till P1 följande:

$$\begin{array}{rrcrcr} \text{maximera} & 200y_1 & + & 100y_2 & & \\ \text{då} & y_1 & + & y_2 & \leq & -8, \\ & y_1 & - & y_2 & \leq & 8, \\ & -y_1 & + & y_2 & \leq & -4, \\ & -y_1 & - & y_2 & \leq & 12, \\ & y_1 & & & \leq & -1, \\ & & & y_2 & \leq & -1. \end{array}$$

Om man ritar upp det tillåtna området till detta problem i en figur med y_1 och y_2 på axlarna så ser man att det blir en konvex femhörning med hörnen i koordinaterna $(-2\,,\,-6)$, $(-1\,,\,-7)$, $(-1\,,\,-9)$, $(-2\,,\,-10)$ och $(-4\,,\,-8)$.

Den "enda" skillnaden mellan de duala problemen D1 och D2 till repektive P1 och P2 är att bivillkoret $-y_1 - y_2 \leq 12$, som ingår i D1, ska bytas ut mot bivillkoret $-y_1 - y_2 \leq 6$ i D2. Men i ovannämnda figur ser man direkt att det inte finns någon punkt $\mathbf{y}$ som uppfyller både $y_1 + y_2 \leq -8$ och $-y_1 - y_2 \leq 6$, vilket även inses om man adderar dessa båda olikheter. Alltså saknar det duala problemet D2 tillåtna lösningar, vilket är vad vi väntade oss eftersom det primala problemet P2 hade tillåtna lösningar men saknade ändligt optimalvärde.

Uppgift 3.(a)

För att utreda om $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ har någon lösning eller ej utför vi "enkla radoperationer",

i enlighet med Gauss-Jordans metod, på matrisen $\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

Addition av (+1) gånger rad 1 till rad 3 ger matrisen $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 6 \end{bmatrix}$.

Addition av (+1) gånger rad 2 till rad 3 ger matrisen $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

Tredje raden motsvarar nu ekvationen $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 3$ som saknar lösning.

Alltså saknar det ursprungliga systemet $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ lösning.

Uppgift 3.(b)

Att minimera $\frac{1}{2} \| \mathbf{Ax} - \mathbf{b} \|^2$ är ekvivalent med att lösa normalekvationerna $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{Ax} = \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{b}$.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ och } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \implies \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \text{ och } \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Vi utför därför "enkla radoperationer" på matrisen $\begin{bmatrix} \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A} & \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 6 \\ -1 & -1 & 2 & -6 \end{bmatrix}$.

Addition av (+0.5) gånger rad 1 till rad 2, samt

addition av (+0.5) gånger rad 1 till rad 3, ger matrisen $\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1.5 & -1.5 & 6 \\ 0 & -1.5 & 1.5 & -6 \end{bmatrix}$.

Addition av (+1) gånger rad 2 till rad 3, samt

addition av (+2/3) gånger rad 2 till rad 1, ger matrisen $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 1.5 & -1.5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Multiplikation av rad 1 med 0.5 och rad 2 med 2/3 ger matrisen $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Den allmänna lösningen till normalekvationerna ges alltså av

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} 2+t \\ 4+t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{z} \cdot t, \text{ där } t \text{ är ett godtyckligt reellt tal.}$$

Man kan notera att $\mathbf{Ax}(t) = \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ för alla $t \in \mathbb{R}$.

Uppgift 3.(c) Vi ska nu minimera $\frac{1}{2}\,\|\mathbf{x}\|^2$ då $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{b}$.

Enligt (b)-uppgiften är $\bar{\mathbf{x}} = (2,\ 4,\ 0)^\mathsf{T}$ en lösning till normalekvationerna.
Då gäller ekvivalensen $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{b} \ \Leftrightarrow\ \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}$,
så problemet ovan kan ekvivalent skrivas: minimera $\frac{1}{2}\,\|\mathbf{x}\|^2$ då $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}$.

Enligt Lagrangemetoden är $\hat{\mathbf{x}} \in I\!R^n$ en optimal lösning till detta konvexa QP-problem om och endast om $\hat{\mathbf{x}}$, tillsammans med en vektor $\bar{\mathbf{u}}$, uppfyller

$$\mathbf{I}\,\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{A}^\mathsf{T}\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \ \text{ och } \ \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}.$$

De första ekvationerna ger att $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^\mathsf{T}\bar{\mathbf{u}}$, som insatt i de senare ger att $\mathbf{A}\mathbf{A}^\mathsf{T}\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}$.

Optimal lösning till problemet ges alltså av $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^\mathsf{T}\bar{\mathbf{u}}$, där $\mathbf{A}\mathbf{A}^\mathsf{T}\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}$. Vi tillämpar därför Gauss-Jordans metod på matrisen $\left[\ \mathbf{A}\mathbf{A}^\mathsf{T} \quad \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}\ \right] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & -4 \\ -1 & -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

Samma "enkla radoperationer" som i 3.(b) ger matrisen $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

En lösning (bland flera) till systemet $\mathbf{A}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{u} = \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}$ är alltså $\bar{\mathbf{u}} = (0,\ -2,\ 0)^\mathsf{T}$.

Då är $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^\mathsf{T}\bar{\mathbf{u}} = (0,\ 2,\ -2)^\mathsf{T}$ optimal lösning till problemet i denna (c)-uppgift.

Kommentar: Det går också bra att lösa problemet med en nollrumsmetod, som på just detta problem blir extra enkel eftersom nollrummet till $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}$ har dimensionen 1 och vi redan i (b) ovan härlett ekvivalensen $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{b} \ \Leftrightarrow\ \mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{z}\cdot t$.
Ekvationssystemet som ska lösas i nollrumsmetoden förenklas här till $\mathbf{z}^\mathsf{T}\mathbf{z}\,t = -\mathbf{z}^\mathsf{T}\bar{\mathbf{x}}$, dvs $3t = -6$, med lösningen $\hat{t} = -2$, varefter $\hat{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{z}\cdot\hat{t} = (0,\ 2,\ -2)^\mathsf{T}$ som ovan.

Denna nollrumsmetod är ekvivalent med att minimera $\frac{1}{2}\,\|\mathbf{x}(t)\|^2$ med avseende på t, där $\mathbf{x}(t) = (2{+}t,\ 4{+}t,\ t)^\mathsf{T}$ från (b)-uppgiften.
Då blir $\frac{1}{2}\,\|\mathbf{x}(t)\|^2 = \frac{1}{2}\,(\,(2{+}t)^2{+}(4{+}t)^2 + t^2\,) = \frac{3}{2}t^2 + 6t + 10 = \frac{3}{2}(t{+}2)^2 + 4$,
som minimeras av $\hat{t} = -2$, vilket ger $\mathbf{x}(\hat{t}) = (0,\ 2,\ -2)^\mathsf{T}$ som ovan.

Uppgift 3.(d) Vi ska nu lösa problemet att minimera $\frac{1}{2}\,\|\mathbf{y} - \mathbf{b}\|^2$ då $\mathbf{y} \in \mathcal{R}(\mathbf{A})$.

Men att $\mathbf{y} \in \mathcal{R}(\mathbf{A})$ är ekvivalent med att $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ för någon vektor $\mathbf{x} \in I\!R^2$, så vårt problem i denna (d)-uppgift är ekvivalent med MK-problemet i (b)-uppgiften ovan!

Där konstaterades att varje vektor på formen $\mathbf{x}(t) = (2{+}t,\ 4{+}t,\ t)^\mathsf{T}$, med $t \in I\!R$, är en optimal lösning till MK-problemet. Men för samtliga dessa är $\mathbf{A}\mathbf{x}(t) = (2, -4,\ 2)^\mathsf{T}$.

Därför är $\hat{\mathbf{y}} = (2, -4,\ 2)^\mathsf{T}$ den unika optimala lösningen till problemet i denna (d)-uppgift.

Uppgift 4.(a) Vi använder oss av att en symmetrisk 2×2–matris $\mathbf{H} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$

* är positivt definit (p.d.) om och endast om $a > 0$, $c > 0$ och $ac - b^2 > 0$,
* är positivt semidefinit (p.s.d.) om och endast om $a \geq 0$, $c \geq 0$ och $ac - b^2 \geq 0$,
vilket kan verifieras med exempelvis en LDL^T–faktorisering.

Målfunktionen är $f(\mathbf{x}) = x_1^3 + x_2^3 - x_1 x_2$.

Gradient och Hessian till f ges av $\nabla f(\mathbf{x})^\mathsf{T} = \begin{pmatrix} 3x_1^2 - x_2 \\ 3x_2^2 - x_1 \end{pmatrix}$ och $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 6x_1 & -1 \\ -1 & 6x_2 \end{bmatrix}$.

Startpunkten ges av $\mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, med $\nabla f(\mathbf{x}^{(1)})^\mathsf{T} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ och $\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(1)}) = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$.

Eftersom $\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(1)})$ är positivt definit ($6 > 0$, $6 > 0$ och $6\cdot 6 - (-1)^2 > 0$) så bestäms Newtonriktningen $\mathbf{d}^{(1)}$ ur ekvationssystemet $\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(1)})\mathbf{d} = -\nabla f(\mathbf{x}^{(1)})^\mathsf{T}$, som här blir

$\begin{bmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 6 \end{bmatrix} \mathbf{d} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$, med lösningen $\mathbf{d}^{(1)} = \begin{pmatrix} -2/5 \\ -2/5 \end{pmatrix}$.

Vi prövar först steget $t_1 = 1$, så att $\mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{x}^{(1)} + t_1 \mathbf{d}^{(1)} = \mathbf{x}^{(1)} + \mathbf{d}^{(1)} = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 3/5 \end{pmatrix}$.

Då blir $f(\mathbf{x}^{(2)}) = 9/125 < 1 = f(\mathbf{x}^{(1)})$, så steget $t_1 = 1$ accepteras.

Därmed har vi utfört en fullständig iteration med Newtons metod och erhållit iterationspunkten $\mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 3/5 \end{pmatrix}$ med $f(\mathbf{x}^{(2)}) = 9/125$.

Uppgift 4.(b)

Eftersom bivillkor saknas måste varje lokal minpunkt till $f(\mathbf{x})$ uppfylla att

$\nabla f(\mathbf{x})^\mathsf{T} = \begin{pmatrix} 3x_1^2 - x_2 \\ 3x_2^2 - x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, dvs $x_2 = 3x_1^2$ och $x_1 = 3x_2^2$, vilket medför

att $x_2 = 27x_2^4$, dvs $x_2(27x_2^3 - 1) = 0$, med de två lösningarna $x_2 = 0$ och $x_2 = 1/3$.

Om $x_2 = 0$ så är $x_1 = 0$ och om $x_2 = 1/3$ så är $x_1 = 1/3$.

De enda lösningarna till $\nabla f(\mathbf{x})^\mathsf{T} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ är alltså $\tilde{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ och $\hat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$.

Men $\mathbf{F}(\tilde{\mathbf{x}}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ är inte positivt semidefinit, så $\tilde{\mathbf{x}}$ är *inte* a lokalt minpunkt.

Däremot är $\mathbf{F}(\hat{\mathbf{x}}) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ positivt definit, så $\hat{\mathbf{x}}$ *är* en lokal minpunkt till $f(\mathbf{x})$.

Den enda lokala minpunkten till $f(\mathbf{x})$ är alltså $\hat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$, med $f(\hat{\mathbf{x}}) = -1/27$.

(Men det finns ingen global minpunkt till $f(\mathbf{x})$ på $\mathbb{R}^2$, ty om exempelvis $\mathbf{x}(t) = (-t,\, 0)^\mathsf{T}$ så gäller att $f(\mathbf{x}(t)) = -t^3 \to -\infty$ då $t \to \infty$.)

Uppgift 4.(c)

Antag att $\mathbf{x} \in C$, dvs att $x_1 > 0.2$ och $x_2 > 0.2$.

Då är Hessianen $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 6x_1 & -1 \\ -1 & 6x_2 \end{bmatrix}$ positivt definit, ty

$6x_1 > 0,\ 6x_2 > 0$ och $(6x_1)(6x_2) - (-1)^2 = 36x_1x_2 - 1 > 36 \cdot 0.04 - 1 > 0.$

Det betyder att $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ är positivt definit för alla $\mathbf{x} \in C$, vilket i sin tur, eftersom C är en konvex mängd, betyder att f är en *konvex* funktion på den konvexa mängden C.

Men då är $f(\mathbf{x}) \geq f(\hat{\mathbf{x}}) + \nabla f(\hat{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})$ för alla $\mathbf{x} \in C$ och $\hat{\mathbf{x}} \in C$.

Speciellt, om vi låter $\hat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$ från (b)-uppiften ovan så är $\hat{\mathbf{x}} \in C$ och $\nabla f(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}^\mathsf{T}$,

vilket betyder att $f(\mathbf{x}) \geq f(\hat{\mathbf{x}}) + \mathbf{0}^\mathsf{T}(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) = f(\hat{\mathbf{x}})$ för alla $\mathbf{x} \in C$.

Uppgift 5.(a)

Problemet kan skrivas på formen:

$$\begin{aligned} \text{minimera} \quad & f(\mathbf{x}) \\ \text{då} \quad & g_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad i = 1,2,3,4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{där} \quad & f(\mathbf{x}) = \tfrac{1}{2}\left((x_1+2)^2+(x_2+4)^2+(x_3+6)^2\right), \\ & g_1(\mathbf{x}) = -x_1, \\ & g_2(\mathbf{x}) = -x_2, \\ & g_3(\mathbf{x}) = -x_3, \\ & g_4(\mathbf{x}) = 3-x_1-x_2-x_3. \end{aligned}$$

KKT-villkoren kan delas upp i fyra grupper enligt följande.

(KKT1) $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}) + y_1 \dfrac{\partial g_1}{\partial x_j}(\mathbf{x}) + y_2 \dfrac{\partial g_2}{\partial x_j}(\mathbf{x}) + y_3 \dfrac{\partial g_3}{\partial x_j}(\mathbf{x}) + y_4 \dfrac{\partial g_4}{\partial x_j}(\mathbf{x}) = 0$, för $j = 1,2,3$:

$$\begin{aligned} & x_1 + 2 - y_1 - y_4 = 0, \\ & x_2 + 4 - y_2 - y_4 = 0, \\ & x_3 + 6 - y_3 - y_4 = 0. \end{aligned}$$

(KKT2) Tillåten punkt, dvs $g_i(\mathbf{x}) \leq 0$ för $i = 1,2,3,4$:

$$\begin{aligned} & x_1 \geq 0, \\ & x_2 \geq 0, \\ & x_3 \geq 0, \\ & x_1+x_2+x_3 \geq 3. \end{aligned}$$

(KKT3) Lagrangemultiplikatorerna icke-negativa:

$$\begin{aligned} & y_1 \geq 0, \\ & y_2 \geq 0, \\ & y_3 \geq 0, \\ & y_4 \geq 0. \end{aligned}$$

(KKT4) Komplementaritetsvillkor, dvs $y_i g_i(\mathbf{x}) = 0$ för $i = 1,2,3,4$:

$$\begin{aligned} & y_1 x_1 = 0, \\ & y_2 x_2 = 0, \\ & y_3 x_3 = 0, \\ & y_4(3-x_1-x_2-x_3) = 0. \end{aligned}$$

Uppgift 5.(b)

Vi söker en lösning till (KKT1)–(KKT4) sådan att $x_1 > 0$ och $x_2 > 0$.
De två första (KKT4)-kraven medför då att $y_1 = 0$ och $y_2 = 0$,
varefter (KKT1) övergår till:

(kkt1-1): $x_1 = y_4 - 2$,
(kkt1-2): $x_2 = y_4 - 4$,
(kkt1-3): $x_3 = y_3 + y_4 - 6$.

Av (kkt1-1) och (kkt1-2) följer att y_4 inte kan vara noll, ty då blir x_1 och x_2 negativa.
Alltså måste $y_4 > 0$, vilket tillsammans med det fjärde (KKT4)-kravet medför att

(kkt4-4): $x_1 + x_2 + x_3 = 3$.

Insättning av (kkt1-1), (kkt1-2) och (kkt1-3) i (kkt4-4) ger att

$$3y_4 + y_3 - 12 = 3, \text{ dvs } y_4 = 5 - y_3/3.$$

Insättning av detta i (kkt1-1), (kkt1-2) och (kkt1-3) ger att

$$\begin{aligned} x_1 &= 3 - y_3/3, \\ x_2 &= 1 - y_3/3, \\ x_3 &= 2y_3/3 - 1. \end{aligned}$$

Det tredje (KKT4)-kravet att $x_3 y_3 = 0$ ger då att

$$(2y_3/3 - 1)\, y_3 = 0, \text{ dvs } y_3 = 3/2 \text{ eller } y_3 = 0.$$

Men $y_3 = 0$ medför enligt ovan att $x_3 = 2y_3/3 - 1 = -1$, vilket bryter mot (KKT2).

Återstår fallet att $y_3 = 3/2$. Då blir enligt ovan

$$\begin{aligned} y_4 &= 5 - y_3/3 = 4.5, \\ x_1 &= 3 - y_3/3 = 2.5, \\ x_2 &= 1 - y_3/3 = 0.5, \\ x_3 &= 2y_3/3 - 1 = 0. \end{aligned}$$

Nu är samtliga KKT-villkor uppfyllda, så slutsatsen är att $\hat{\mathbf{x}} = (2.5,\ 0.5,\ 0)^\mathsf{T}$,
tillsammans med $\hat{\mathbf{y}} = (0,\ 0,\ 1.5,\ 4.5)^\mathsf{T}$, uppfyller KKT-villkoren för P.
$\hat{\mathbf{x}} = (2.5,\ 0.5,\ 0)^\mathsf{T}$ är alltså en KKT-punkt till P med $\hat{x}_1 > 0$ och $\hat{x}_2 > 0$,
vilket var det som söktes.

Uppgift 5.(c)

Bivillkorsfunktionerna g_i är linjära, och således även konvexa.
Målfunktionen f är en kvadratisk funktion med Hessianen $\mathbf{H} = \mathbf{I}$ = enhetsmatrisen (3×3)
som är en diagonalmatris med strikt positiva diagonalelement, och därför positivt definit,
vilket medför att f är en konvex funktion på $\mathbb{R}^3$. P är alltså ett konvext optimeringsproblem.
Därmed är (enligt känd sats) varje KKT-punkt till P även en globalt optimal lösning till P.

Speciellt är $\hat{\mathbf{x}} = (2.5,\ 0.5,\ 0)^\mathsf{T}$ en globalt optimal lösning till P, vilket medför att varje
tillåten lösning $\mathbf{x}$ till P uppfyller $f(\mathbf{x}) \geq f(\hat{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2}\,(4.5^2 + 4.5^2 + 6^2) = 38.25$.

Med (exempelvis) $K = 38.2 > 38$ så är alltså $f(\mathbf{x}) \geq K$ för alla tillåtna lösningar $\mathbf{x}$ till P.