KTH Matematik

Tentamen i SF1861 och SF1851 Optimeringslära.
Fredag 30 augusti 2013 kl. 8.00–13.00

Examinator: Krister Svanberg, tel. 790 71 37

Tillåtna hjälpmedel: Penna, suddgummi och linjal. **Ej räknare!** Ett formelblad delas ut.

Lösningsmetoder: Om ej annat anges i texten skall problemen lösas med systematiska metoder som ej blir orimliga vid stora problem. Slutsatser ska motiveras ordentligt. Om ej annat anges i texten får kända satser användas utan bevis.

Bonus: Den som har minst 5 poäng från årets hemuppgifter hoppar över uppgift 1(a). Den som har minst 9 poäng från något års hemuppgifter hoppar över hela uppgift 1.

För godkänt krävs 25 poäng. 23–24 poäng ger möjlighet att komplettera inom tre veckor efter att tentamensresultatet har anslagits. Kontakta examinator.

Behandla endast en uppgift per blad. Numrera sidorna och skriv namn på varje blad.

---

1. (a) Ett företag tillverkar de tre produkterna A, B och C.
Tillverkningen består av momenten *stansning* och *pressning*.
Varje produkt måste genomgå *bägge* momenten.

Stansavdelningen, som kan utnyttjas 8 timmar per dag, har följande kapacitet:
2000 enheter per timme av produkt A, eller
1600 enheter per timme av produkt B, eller
1200 enheter per timme av produkt C.
Avdelningen kan utan problem ställa om från en produkt till en annan.

Pressavdelningen, som kan utnyttjas 8 timmar per dag, har följande kapacitet:
1000 enheter per timme av produkt A, eller
1500 enheter per timme av produkt B, eller
1900 enheter per timme av produkt C.
Avdelningen kan utan problem ställa om från en produkt till en annan.

Täckningsbidraget (intäkt minus rörlig kostnad) per tillverkad enhet av respektive produkt är: 11 kr för A, 9 kr för B och 8 kr för C.

Företaget vill nu bestämma hur många enheter av respektive produkt som ska tillverkas per dag för att det totala täckningsbidraget ska bli så stort som möjligt utan att man bryter mot avdelningarnas kapacitetsbegränsningar.

Din uppgift är att formulera företagets problem som ett LP-problem. Förklara vad dina variabler, målfunktion och bivillkor står för.

Du behöver *inte* beräkna en optimal lösning till problemet. .... (5p)

(b) I denna uppgift är $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 7 \\ 3 & 6 & 9 & 9 \end{bmatrix}$.

Bestäm en bas för vart och ett av de fyra fundamentala underrummen till $\mathbf{A}$, dvs för bildrummet respektive nollrummet till $\mathbf{A}$ ($\mathcal{R}(\mathbf{A})$ och $\mathcal{N}(\mathbf{A})$), samt för bildrummet respektive nollrummet till $\mathbf{A}^\mathsf{T}$ ($\mathcal{R}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$ och $\mathcal{N}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$). (4p)

2. (a) Betrakta följande LP-problem på standardform:

$$
\begin{aligned}
\text{P1:} \quad & \text{minimera} && x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 \\
& \text{då} && x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\
& && x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 2, \\
& && x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4.
\end{aligned}
$$

Visa att $(x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4) = (1.5,\, 0.5,\, 0,\, 0)$ är en optimal lösning till P1. . . (4p)

(b) Antag nu att vi ändrar likhetsbivillkoren i P1 till olikhetsbivillkor av typen $\geq$, så att följande LP-problem erhålls:

$$
\begin{aligned}
\text{P2:} \quad & \text{minimera} && x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 \\
& \text{då} && x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \geq 1, \\
& && x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \geq 2, \\
& && x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4.
\end{aligned}
$$

Bestäm, med simplexmetoden, en optimal lösning till detta LP-problem P2. Det är tillåtet att utgå från resultatet i (a)-uppgiften ovan. . . . . (4p)

(c) Formulera de duala problemen D1 och D2 svarande mot respektive P1 och P2. Åskådliggör dessa båda duala problem i varsin noggrann figur. Bestäm, *med hjälp av dessa figurer*, optimala lösningar till D1 och D2. . . (4p)

3. Denna uppgift handlar om ett litet elektriskt nätverk med resistanser på länkarna. Nätverket har nodmängden $\mathcal{N} = \{1, 2, 3, 4\}$ (dvs total 4 st noder) och länkmängden $\mathcal{B} = \{(1, 3),\ (1, 4),\ (2, 3),\ (2, 4)\}$. Varje länk $(i, j) \in \mathcal{B}$ har en given resistans R_{ij} Ohm.

Antag nu att man utifrån (mha strömkällor) matar in strömmen 4 Ampere i nod 1 och tar ut strömmen 4 Ampere från nod 4. Den totala (värme-)effekten i nätverket ges då av

$$R_{13}x_{13}^2 + R_{14}x_{14}^2 + R_{23}x_{23}^2 + R_{24}x_{24}^2,$$

där x_{ij} = strömmen i länken (i, j). Om $x_{ij} > 0$ så går strömmen i länken från nod i till nod j, medan om $x_{ij} < 0$ så går strömmen i länken från nod j till nod i.

Naturen väljer strömmarna x_{ij} på ett sådant sätt att ovanstående summa minimeras under bivillkor på strömbalanser i de tre första noderna. Strömbalans i den fjärde noden, dvs $-x_{14} - x_{24} = -4$, följer av strömbalanserna i de övriga tre noderna, som för alla balanserade nätverksflödesproblem.

Din uppgift är nu att beräkna länkströmmarna x_{ij} genom att lösa ovannämnda optimeringsproblem som har en konvex kvadratisk målfunktion och linjära likhetsbivillkor. Använd en lämplig generell metod för denna typ av kvadratisk optimering. Du får för enkelhets skull anta att $R_{ij} = 1$ för alla länkar. (9 p)

4. Man vill minimera följande ickelinjära funktion utan några bivillkor:

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^2 + x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_1 - 6x_2.$$

(a) Utför två fullständiga iterationer med Newtons metod, utgående från startpunkten $\mathbf{x}^{(1)} = (0,\, 0)^\mathsf{T}$, dvs beräkna iterationspunkterna $\mathbf{x}^{(2)}$ och $\mathbf{x}^{(3)}$ samt motsvarande målfunktionsvärden. ....(6p)

(b) Är punkten $(0.5,\, 1)^\mathsf{T}$ en lokal minpunkt till $f(x_1, x_2)$? ....(1p)

(c) Avgör om f är en konvex funktion på hela planet $\mathbb{R}^2$. .... (3p)

Räknehjälp: Det får anses vara känt att en symmetrisk $2\times 2-$matris $\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ är positivt semidefinit om och endast om $a \geq 0$, $c \geq 0$ och $ac - b^2 \geq 0$, samt positivt definit om och endast om $a > 0$, $c > 0$ och $ac - b^2 > 0$.

5. De båda deluppgifterna i denna uppgift 5 är oberoende av varandra.
Det går alltså att lösa (b)-uppgiften utan att först lösa (a)-uppgiften och vice versa.

(a) Låt i denna deluppgift $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x}$, där $\mathbf{H}$ är en given symmetrisk positivt semidefinit $n\times n-$matris och $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$ är en given vektor i $\mathbb{R}^n$.
Antag att punkten $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ uppfyller att $f(\hat{\mathbf{x}}) \leq f(\mathbf{x})$ för alla $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.
Visa att då gäller följande:

$$\hat{\mathbf{x}} \neq \mathbf{0}, \quad f(\hat{\mathbf{x}}) < 0, \quad \text{och} \quad \hat{\mathbf{x}}^\mathsf{T}\mathbf{H}\hat{\mathbf{x}} > 0.$$

Observera att vi förutsatt att den givna vektorn $\mathbf{c}$ inte är nollvektorn. .. (5p)

(b) I denna deluppgift antar vi att f är en given kontinuerligt deriverbar konvex funktion från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}$. (Ej samma funktion f som i (a)-uppgiften.)
Betrakta problemet:

$$\text{minimera } f(\mathbf{x}) \text{ då } \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \quad \text{dvs } x_j \geq 0 \text{ för } j = 1, \ldots, n.$$

Ställ upp KKT-villkoren för detta problem, samt visa med hjälp av dessa att punkten $\hat{\mathbf{x}} = (\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n)^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^n$ är en globalt optimal lösning till problemet om och endast om samtliga följande villkor är uppfyllda:

$$\hat{\mathbf{x}} \geq \mathbf{0}, \quad \nabla f(\hat{\mathbf{x}})^\mathsf{T} \geq \mathbf{0} \quad \text{och} \quad \nabla f(\hat{\mathbf{x}})\, \hat{\mathbf{x}} = 0,$$

där $\nabla f(\hat{\mathbf{x}}) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\hat{\mathbf{x}}), \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(\hat{\mathbf{x}}) \right)$ = gradienten till f i punkten $\hat{\mathbf{x}}$.
Kända satser får användas om de formuleras korrekt. .... (5p)

Lycka till!