KTH Matematik

Tentamen i SF1861 och SF1851 Optimeringslära.
Måndag 17 augusti 2015 kl. 8.00–13.00

Examinator: Krister Svanberg, tel. 790 71 37.

Tillåtna hjälpmedel: Penna, suddgummi och linjal. **Ej räknare!** Ett formelblad delas ut.

Lösningsmetoder: Om ej annat anges i texten skall problemen lösas med systematiska metoder som ej blir orimliga vid stora problem. Slutsatser ska motiveras ordentligt. Om ej annat anges i texten får kända satser användas utan bevis.

Bonus: Den som har minst 5 poäng från årets hemuppgifter hoppar över uppgift 1(a). Den som har minst 9 poäng från något års hemuppgifter hoppar över hela uppgift 1.

För godkänt krävs 25 poäng. 23–24 poäng ger möjlighet att komplettera inom tre veckor efter att tentamensresultatet har anslagits. Kontakta examinator.

Behandla endast en uppgift per blad. Numrera sidorna och skriv namn på varje blad.

---

1. (a) Ett visst kabelföretag tillverkar 4 typer av kablar, kallade K1, K2, K3 och K4. Var och en av dessa kan tillverkas på någon av de tre maskinerna M1, M2 eller M3. Produktionshastigheten (i meter/timme) för respektive maskin och kabel framgår av följande tabell:

Kabeltyp	Maskin M1	Maskin M2	Maskin M3
K1	300	600	800
K2	250	400	700
K3	200	350	600
K4	100	200	300

Varje maskin kan användas i högst 50 timmar/vecka. Driftskostnaden för de olika maskinerna är 350 kr/tim för M1, 500 kr/tim för M2 och 750 kr/tim för M3. En viss vecka har man order på resp 16 km, 10 km, 12 km och 8 km av de olika kabeltyperna. Man frågar sig nu hur mycket av respektive kabeltyp man ska tillverka på respektive maskin för att på billigaste sätt uppfylla ovanstående order under den aktuella vecka. Formulera detta som ett LP-problem. . . .(5p)

(b) Betrakta LP-problemet minimera $\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x}$ då $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ och $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, där

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 40 \\ 35 \\ -30 \\ -25 \\ -20 \end{pmatrix} \text{ och } \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Av det speciella utseendet på matrisen $\mathbf{A}$ följer att problemet P i själva verket är ett minkostnadsflödesproblem. Rita motsvarande nätverk och verifiera därefter att $\hat{\mathbf{x}} = (40,\, 0,\, 50,\, 25,\, 0,\, 20,\, 0)^\mathsf{T}$ är en optimal lösning till P. . . . . (4p)

2. Betrakta följande LP-problem P1:

$$\text{P1:} \quad \begin{array}{rl} \text{minimera} & 3x_1 - x_2 + 2x_3 \\ \text{då} & -2x_1 + x_2 - x_3 \leq 2, \\ & x_1 - x_2 - x_3 \leq 1, \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1,2,3. \end{array}$$

(a) Tillämpa simplexmetoden på detta problem P1, med slackvariablerna som startbasvariabler. Vad blir resultatet? ....(4p)

(b) Antag att kostnadskoefficienten för x_1 ändras från 3 till 1, så att följande modifierade problem P2 erhålls:

$$\text{P2:} \quad \begin{array}{rl} \text{minimera} & x_1 - x_2 + 2x_3 \\ \text{då} & -2x_1 + x_2 - x_3 \leq 2, \\ & x_1 - x_2 - x_3 \leq 1, \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1,2,3. \end{array}$$

Tillämpa simplexmetoden på detta problem P2, med slackvariablerna som startbasvariabler. Vad blir resultatet? ....(3p)

(c) Finns det, för något av problemen P1 eller P2, en tillåten lösning $\tilde{\mathbf{x}}$ med ett målfunktionsvärde som är < -1000? Ange i såfall en sådan lösning. (2p)

(d) Formulera de duala LP-problemen D1 och D2, svarande mot de primala problemen P1 respektive P2 ovan. Illustrera D1 och D2 i varsin noggrann figur, och verifiera att de slutsatser du kan dra från dessa figurer är helt konsistenta med dina resultat från (a) och (b) ovan. ....(4p)

3. Betrakta följande minsta-kvadratproblem (MK-problem):

$$\text{minimera} \quad \tfrac{1}{2}\,\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|^2 \quad (= \tfrac{1}{2}\,(\mathbf{Ax} - \mathbf{b})^\mathsf{T}(\mathbf{Ax} - \mathbf{b})\,),$$

där $\mathbf{x} = (x_1,\, x_2)^\mathsf{T} \in I\!R^2$ är variabelvektorn, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \end{pmatrix}$.

(a) Bestäm *samtliga* optimala lösningar till ovanstående MK-problem. ...... (3p)

(b) Bestäm den vektor $\hat{\mathbf{x}}$ bland alla optimala lösningar till MK-problemet ovan som har minst norm, dvs bestäm MN-lösningen till MK-problemet. ..... (3p)

(c) Bestäm den punkt i $\mathcal{R}(\mathbf{A})$ (bildrummet till $\mathbf{A}$) som har kortast avstånd till punkten $(100,\, 200)^\mathsf{T}$. ....(3p)

4. På en platta är 4 st komponenter utplacerade i punkter med koordinaterna:

(6, 8) , (−6, 8) , (−8, −6) och (8, −6).

Man vill nu förbinda dessa 4 komponenter med en 5:e komponent, så att det från var och en av de 4 första komponenterna går en (direkt-)tråd till den 5:e.
Frågan är var på plattan denna 5:e komponent ska placeras för att totala trådlängden ska bli så liten som möjligt, dvs för att *summan av avstånden* från den 5:e komponenten till var och en av de ursprungliga 4 komponenterna ska bli så liten som möjligt.

(a) Formulera detta som ett ickelinjärt optimeringsproblem. Variabler i ditt problem ska vara de sökta koordinaterna (x, y) för den 5:e komponenten. (1p)

(b) Välj startpunkten $(x, y) = (0, 0)$ och genomför en fullständig iteration med *Newtons method* på problemet. .... (5p)

(c) Antag att man, i stället för att minimera summan av avstånden från den 5:e komponenten till var och en av de ursprungliga 4 komponenterna, väljer att minimera summan av *kvadraterna* på avstånden från den 5:e komponenten till var och en av de ursprungliga 4 komponenterna.
Vad blir då den optimala placeringen av den 5:e komponenten? .... (4p)

Frivillig deriveringshjälp för (b)-uppgiften:

Om $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ och $(x, y) \neq (a, b)$ så är $\dfrac{\partial r}{\partial x} = \dfrac{x-a}{r}$, $\dfrac{\partial r}{\partial y} = \dfrac{y-b}{r}$,

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{(y-b)^2}{r^3}\ , \quad \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} = \frac{(x-a)^2}{r^3}\ , \quad \frac{\partial^2 r}{\partial x \partial y} = -\frac{(x-a)(y-b)}{r^3}\ .$$

5. Denna uppgift handlar om följande problem med olikhetsbivillkor:

$$\begin{aligned} \text{minimera} \quad & \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{x} + \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} \\ \text{då} \quad & x_j^2 \leq 1, \quad j = 1, \ldots, 5, \end{aligned}$$

där $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^\mathsf{T}$ är variabelvektorn och $\mathbf{c} = (2.4,\ 1.6,\ 0, -1.8, -2.6)^\mathsf{T}$.

(a) Formulera i detalj KKT-villkoren för detta problem. .... (1p)

(b) Bestäm en "KKT-punkt" $\hat{\mathbf{x}}$ till problemet, dvs en punkt $\hat{\mathbf{x}} \in I\!R^5$ som tillsammans med lämpligt valda lagrangemultiplikatorer uppfyller KKT-villkoren till problemet. Ange även värdena på lagrangemultiplikatorerna! (6p)

(c) Är din punkt $\hat{\mathbf{x}}$ ovan en global optimallösning till problemet?
Motivera svaret ordentligt! .... (2p)

Lycka till!