KTH Matematik

Tentamen i SF1861 och SF1851 Optimeringslära.
Måndag 15 augusti 2016 kl. 8.00–13.00

Examinator: Krister Svanberg, tel. 790 71 37.

Tillåtna hjälpmedel: Penna, suddgummi och linjal. **Ej räknare!** Ett formelblad delas ut.

Lösningsmetoder: Om ej annat anges i texten skall problemen lösas med systematiska metoder som ej blir orimliga vid stora problem. Slutsatser ska motiveras ordentligt. Om ej annat anges i texten får kända satser användas utan bevis.

Bonus: Den som har minst 5 poäng från årets hemuppgifter hoppar över uppgift 1(a). Den som har minst 9 poäng från något års hemuppgifter hoppar över hela uppgift 1.

För godkänt krävs 25 poäng. 23–24 poäng ger möjlighet att komplettera inom tre veckor efter att tentamensresultatet har anslagits. Kontakta examinator.

Behandla endast en uppgift per blad. Numrera sidorna och skriv namn på varje blad.

---

1. (a) Ett litet familjeföretag producerar (rostar och förpackar) två nötblandningar, kallade Familjeblandning och Lyxblandning. Båda blandningarna består av enbart hasselnötter och mandel, och företaget garanterar att andelen hasselnötter i Familjeblandningen är minst 30% och högst 40%, medan andelen hasselnötter i Lyxblandningen är minst 50% och högst 60%.

Under den nu aktuella planeringsperioden har företaget möjlighet att, från sin underleverantör, köpa in högst 250 kg hasselnötter, till priset C_H kr/kg, och högst 300 kg mandel, till priset C_M kr/kg. Vid slutet av planeringsperioden kan företaget sedan, till en lokal stormarknad, sälja nötblandningarna till priserna C_F kr/kg för Familjeblandning och C_L kr/kg för Lyxblandning.
C_H, C_M, C_F och C_L är för företaget kända konstanter.

Företaget undrar nu hur mycket man ska producera av respektive blandning, och hur de ska sammansättas. Målet är att företagets "vinst", här definierad som försäljningsintäkter minus inköpskostnader, ska bli så stor som möjligt.

Din uppgift är att formulera företagets problem som ett LP-problem! . . . (5p)

Ledning: Lämpliga optimeringsvariabler kan vara X_{HF}, X_{MF}, X_{HL} och X_{ML}, där X_{HF} betecknar kvantiteten hasselnötter (i sorten kg) som ska användas till Familjeblandning under perioden, och motsvarande för de övriga variablerna.

(b) Bestäm baser för de fyra fundamentala underrummen till matrisen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ dvs baser för } \mathcal{R}(\mathbf{A}),\ \mathcal{N}(\mathbf{A}),\ \mathcal{R}(\mathbf{A}^\mathsf{T}) \text{ och } \mathcal{N}(\mathbf{A}^\mathsf{T}).$$

Kontrollera sedan rimligheten i dina svar genom att verifiera att de välkända ortogonalitetssambanden är uppfyllda för dina beräknade baser. . . . .(4p)

OBS: *Frivillig räknehjälp* till någon eller några av uppgifterna **2-4** nedan.

Om $ad-bc \neq 0$ så är $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

2. Betrakta följande LP-problem P i variabelvektorn $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_9)^\mathsf{T} \in I\!R^9$:

$$\begin{aligned} \text{P:}\quad \text{minimera}\quad & \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} \\ \text{då}\quad & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \end{aligned}$$

där $\mathbf{c}^\mathsf{T} = (\ 8\ \ 7\ \ 6\ \ 5\ \ 4\ \ 5\ \ 6\ \ 7\ \ 8\ )$,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} \text{ och } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 40 \\ 80 \end{pmatrix}.$$

Komponenterna i vectorn $\mathbf{c}$ ges alltså av $c_j = 4 + |\,j-5\,|$, för $j = 1, \ldots, 9$,

medan kolonnerna i matrisen $\mathbf{A}$ ges av $\mathbf{a}_j = \begin{pmatrix} 9-j \\ j-1 \end{pmatrix}$, för $j = 1, \ldots, 9$.

(a) Starta med x_1 och x_9 som basvariabler och genomför en fullständig iteration med Simplexmetoden. Avgör om den nya baslösning du kommit fram till är en optimal lösning till P eller ej. .... (6p)

(b) Formulera i detalj det motsvarande duala LP-problemet D, och åskådliggör det tillåtna området till detta duala problem i en stor och noggrann figur. Bestäm, med valfri metod, en optimal lösning $\hat{\mathbf{y}}$ till D. .... (3p)

(c) Hur många olika *tillåtna baslösningar* till P med x_5 som en av basvariablerna finns det? Hur många av dessa är *optimala baslösningar* till P? .... (4p)

3. I följande optimeringsproblem P med *olikhetsbivillkor* är högerleden p och q givna konstanter (reella tal).

$$\begin{aligned} \text{P:}\quad \text{minimera}\quad & \tfrac{1}{2}\,(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) \\ \text{då}\quad & 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + \ \ x_4 \geq p, \\ & \ \ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \geq q. \end{aligned}$$

(a) Ställ upp KKT-villkoren i detalj för detta problem P. .... (1p)

(b) För vilka värden på konstanterna p och q finns det en lösning $\hat{\mathbf{x}} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, \hat{x}_4)^\mathsf{T}$ och $\hat{\mathbf{y}} = (\hat{y}_1, \hat{y}_2)^\mathsf{T}$ till ovanstående KKT-villkor sådan att de två bivillkoren i P båda är uppfyllda med *likhet* i $\hat{\mathbf{x}}$?
Ange även, för dessa värden på p och q, $\hat{\mathbf{x}}$ och $\hat{\mathbf{y}}$ uttryckta i p och q. .... (6p)

(c) Är din lösning $\hat{\mathbf{x}}$ i (b)-uppgiften garanterat en globalt optimal lösning till P för de värden på p och q som du angett? Motivera svaret ordentligt. .... (1p)

4. I denna uppgift ges funktionen $f : I\!R^2 \to I\!R$ av

$$f(\mathbf{x}) = \tfrac{1}{4}\,x_1^4 - x_1 - x_1x_2 + x_1^2x_2^2, \quad \text{där } \mathbf{x} = (x_1, x_2)^\mathsf{T}.$$

(a) Genomför en fullständig iteration med *Newtons method* för att minimera $f(\mathbf{x})$ utan några bivillkor. Starta från punkten $\mathbf{x}^{(1)} = (1\,,0)^\mathsf{T}$. . . . . (6p)

(b) Betrakta de båda punkterna $\tilde{\mathbf{x}} = (0\,,-1)^\mathsf{T}$ och $\hat{\mathbf{x}} = (1\,,0.5)^\mathsf{T}$.
Avgör, för var och en av dessa, om det är en lokal minpunkt till f eller ej. Avgör även om någon av de två är en global minpunkt till f. . . . . (4p)

5. (a) Låt $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ vara en given vektor i $I\!R^3$ och b en given konstant.
Då gäller som bekant att mängden av lösningar $\mathbf{x} \in I\!R^3$ till ekvationen $\mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{x} = b$, som även kan skrivas $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b$, utgör ett *plan* i $I\!R^3$.
Låt $\mathbf{q}$ vara en given punkt i $I\!R^3$. Den punkt $\hat{\mathbf{x}}$ i ovannämnda plan som ligger *närmast* punkten $\mathbf{q}$ (bland alla punkter $\mathbf{x}$ i planet) ges då av optimala lösningen till följande konvexa QP-problem:

$$\begin{array}{rl} \text{minimera} & \tfrac{1}{2}\,\|\,\mathbf{x}-\mathbf{q}\,\|^2 = \tfrac{1}{2}\,(\mathbf{x}-\mathbf{q})^\mathsf{T}(\mathbf{x}-\mathbf{q}) \\ \text{då} & \mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{x} = b. \end{array}$$

Använd *Lagrangemetoden* för att bestämma den optimala lösningen $\tilde{\mathbf{x}}$, uttryckt i $\mathbf{q}$, $\mathbf{a}$ och b, till detta QP-problem.
Kvadraten på avståndet från $\mathbf{q}$ till planet ges sedan av $\|\,\tilde{\mathbf{x}}-\mathbf{q}\,\|^2$.
Använd ditt uttryck för $\tilde{\mathbf{x}}$ för att visa att $\|\,\tilde{\mathbf{x}}-\mathbf{q}\,\|^2 = \dfrac{(\mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{q}-b)^2}{\mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{a}}$. . . . . (4p)

(b) Betrakta nu följande fyra plan:

$$\begin{aligned} P_1 &= \{\, \mathbf{x} \in I\!R^3 \mid x_1 = 0 \,\}, \\ P_2 &= \{\, \mathbf{x} \in I\!R^3 \mid x_2 = 0 \,\}, \\ P_3 &= \{\, \mathbf{x} \in I\!R^3 \mid x_3 = 0 \,\}, \\ P_4 &= \{\, \mathbf{x} \in I\!R^3 \mid 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 9 \,\}, \end{aligned}$$

och låt $d_i(\mathbf{x})$ beteckna avståndet från $\mathbf{x} \in I\!R^3$ till planet P_i, för $i = 1, 2, 3, 4$.
Optimala lösningen till följande optimeringsproblem utan bivillkor är då den punkt $\hat{\mathbf{x}}$ i $I\!R^3$ som minimerar kvadratsumman av avstånden till de fyra planen.

$$\begin{array}{rl} \text{minimera} & \tfrac{1}{2}\,(d_1(\mathbf{x})^2 + d_2(\mathbf{x})^2 + d_3(\mathbf{x})^2 + d_4(\mathbf{x})^2) \\ \text{då} & \mathbf{x} \in I\!R^3. \end{array}$$

Ställ upp det ekvationssystem (i siffror) som behöver lösas för att bestämma optimal lösning $\hat{\mathbf{x}}$ till detta problem. Visa sedan att lösningen är på formen $\hat{\mathbf{x}} = t \cdot (2, 1, 2)^\mathsf{T}$, där t är ett reellt tal som du ska ange värdet på. . . . . (6p)
Ledning: Formeln som står på sista raden i (a)-uppgiften ovan får användas i (b)-uppgiften även om du misslyckades med (a)-uppgiften.

Lycka till!