KTH Matematik

Tentamen i SF1861 Optimeringslära.
Måndag 14 augusti 2017 kl. 8.00–13.00

Examinator: Krister Svanberg, tel. 790 71 37.

Tillåtna hjälpmedel: Penna, suddgummi och linjal. **Ej räknare!** Ett formelblad delas ut.

Lösningsmetoder: Om ej annat anges i texten skall problemen lösas med systematiska metoder som ej blir orimliga vid stora problem. Slutsatser ska motiveras ordentligt. Om ej annat anges i texten får kända satser användas utan bevis.

Bonus: Den som har minst 5 poäng från årets hemuppgifter hoppar över uppgift 1(a). Den som har minst 9 poäng från något års hemuppgifter hoppar över hela uppgift 1.

För godkänt krävs 25 poäng. 23–24 poäng ger möjlighet att komplettera inom tre veckor efter att tentamensresultatet har anslagits. Kontakta examinator.

Behandla endast en uppgift per blad. Numrera sidorna och skriv namn på varje blad.

---

1. (a) Ett flygbolag ska under en tidsperiod försörja fyra av de flygplatser bolaget trafikerar med bränsle. Bränslebehovet under den aktuella perioden uppskattas enligt följande:

Flygplats	Fp 1	Fp 2	Fp 3	Fp 4
Behov (ton)	200	300	400	500

Man har från tre olika bränsleleverantörer fått offerter avseende dels total leveranskapacitet under den aktuella perioden, dels priser för leverans till respektive flygplats:

Leverantör	Lev 1	Lev 2	Lev 3
Kapacitet (ton)	600	350	450

Priser (kkr/ton)	Till Fp 1	Till Fp 2	Till Fp 3	Till Fp 4
Från Lev 1	5	4	4	5
Från Lev 2	7	4	4	6
Från Lev 3	8	6	5	7

Man ska nu bestämma en inköpsplan som minimerar flygbolagets kostnader för bränsle under den aktuella perioden.

Formulera detta som ett LP-problem. Du behöver dock inte lösa LP-problemet. Ange noggrant vad dina variabler, målfunktion och bivillkor står för. ....(5p)

(b) Bestäm baser till vart och ett av de fundamentala underrummen till matrisen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}, \text{ dvs baser till } \mathcal{R}(\mathbf{A}),\ \mathcal{R}(\mathbf{A}^\mathsf{T}),\ \mathcal{N}(\mathbf{A}) \text{ och } \mathcal{N}(\mathbf{A}^\mathsf{T}). \quad .....(4p)$$

2. (a) Betrakta följande LP-problem:

$$\begin{array}{rl} \text{minimera} & 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 \\ \text{då} & 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 7, \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 8, \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1,2,3,4. \end{array}$$

Visa att $(x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4) = (2,\, 3,\, 0,\, 0)$ är en optimal lösning till problemet. Formulera även det motsvarande *duala* LP-problemet och ange en optimal lösning till detta. .... (6p)

(b) Antag nu att vi ändrar likhetsbivillkoren i problemet ovan till olikhetsbivillkor, det första av typen "$\leq$" och det andra av typen "$\geq$", så att följande nya LP-problem erhålls:

$$\begin{array}{rl} \text{minimera} & 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 \\ \text{då} & 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \leq 7, \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 \geq 8, \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1,2,3,4. \end{array}$$

Bestäm en optimal lösning till detta nya LP-problem. .... (5p)
(Det är tillåtet att starta från baslösningen i (a)-uppgiften ovan.)

3. Betrakta följande kvadratiska optimeringsproblem med linjära likhetsbivillkor:

$$\text{P1}: \quad \text{minimera} \quad \tfrac{1}{2}\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{x} \quad \text{då} \quad \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

$$\text{där} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Kommentar/tolkning, som dock *inte* behöver utnyttjas:
P1 kan tolkas som ett flödesproblem med kvadratisk målfunktion i ett nätverk med fyra noder och länkar mellan alla par av noder.
Låt variabelvektorn vara $\mathbf{x} = (x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{23}, x_{24}, x_{34})^\mathsf{T}$, där variabeln x_{ij} står för flödet i länken (i,j), med $x_{ij} > 0$ om flödet i länken (i,j) går från nod i till j och $x_{ij} < 0$ om flödet i länken (i,j) går från nod j till i.
Då kan bivillkoren $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tolkas som flödesbalansvillkor i noderna 1, 2 och 3, där nod 1 är en källnod med tillgången 6, nod 2 är en källnod med tillgången 2, och nod 3 är en sänknod med efterfrågan 2.
Varje lösning $\mathbf{x} \in I\!R^6$ till $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ kommer då att uppfylla även flödesbalansvillkoret $-x_{14} - x_{24} - x_{34} = -6$ för nod 4 som alltså är en sänknod med efterfrågan 6.

(a) Avgör om någon eller några av nedanstående tre vektorer $\mathbf{x}^{(1)}$, $\mathbf{x}^{(2)}$ och $\mathbf{x}^{(3)}$ är en optimal lösning till P1:

$$\mathbf{x}^{(1)} = (2,2,2,2,2,2)^\mathsf{T}$$
$$\mathbf{x}^{(2)} = (1,2,3,1,2,1)^\mathsf{T}$$
$$\mathbf{x}^{(3)} = (2,2,3,0,1,1)^\mathsf{T}$$

Ange i såfall vilken/vilka av dem som är det. Motivera svaret! .... (5p)

(b) Antag nu att vi byter ut den kvadratiska målfunktionen i P1 mot en linjär målfunktion $\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x}$, och således betraktar problemet

$$\text{P2}: \quad \text{minimera} \quad \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} \quad \text{då} \quad \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Observera att det fortfarande inte finns några krav på att $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$.
Avgör om det finns någon vektor $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$ för vilken minst en av de tre vektorerna $\mathbf{x}^{(1)}$, $\mathbf{x}^{(2)}$ och $\mathbf{x}^{(3)}$ är en optimal lösning till problemet P2.
Ange i såfall en sådan vektor $\mathbf{c}$, och ange vilken/vilka av de tre vektorerna som då är optimal/optimala till P2. Motivera svaret! .... (3p)

4. Låt funktionen $f : I\!R^2 \to I\!R$ definieras av

$$f(\mathbf{x}) = (x_1 + x_2)^3 + (x_1 + x_2)^2 + (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 4)^2, \quad \text{där } \mathbf{x} = (x_1, x_2)^\mathsf{T}.$$

(a) Starta från punkten $\mathbf{x}^{(1)} = (0,\, 0)^\mathsf{T}$ och genomför en fullständig iteration med *Newtons metod* för minimering av $f(\mathbf{x})$ (utan några bivillkor).
Kontrollera speciellt att $f(\mathbf{x}^{(2)}) < f(\mathbf{x}^{(1)})$. .... (6p)

(b) Beräkna (analytiskt) samtliga lokala minpunkter till $f(\mathbf{x})$. .... (4p)

(c) Om a är ett givet reellt tal så definierar vi mängden C_a genom
$C_a = \{\, \mathbf{x} = (x_1, x_2)^\mathsf{T} \in I\!R^2 \mid x_1 + x_2 \geq a \,\}$.
Det är lätt att visa att C_a är en *konvex mängd*. (Det behöver du inte visa.)
Bestäm det *minsta* värde på talet a för vilket funktionen f ovan är en *konvex funktion* på mängden C_a. .... (2p)

5. Betrakta följande problem i variabelvektorn $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^\mathsf{T} \in I\!R^4$:

$$\begin{aligned} \text{P}: \quad \text{minimera} \quad & 4x_1^2 - 3x_2^2 + 5x_3^2 - 2x_4^2 \\ \text{då} \quad & 1 \leq x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \leq 4. \end{aligned}$$

(a) Formulera KKT-villkoren i detalj för just detta problem. .... (2p)

(b) Bestäm *samtliga* lösningar till dessa KKT-villkor. .... (6p)

(c) Är någon av dina hittade KKT-punkter en globalt optimal lösning till P?
I såfall vilken/vilka? Motivera svaret noggrant. .... (2p)

Lycka till!