KTH Matematik

Tentamen i SF1861 och SF1851 Optimeringslära.
Tisdag 3 juni 2014 kl. 8.00–13.00

Examinator: Krister Svanberg, tel. 790 71 37

Tillåtna hjälpmedel: Penna, suddgummi och linjal. **Ej räknare!** Ett formelblad delas ut.

Lösningsmetoder: Om ej annat anges i texten skall problemen lösas med systematiska metoder som ej blir orimliga vid stora problem. Slutsatser ska motiveras ordentligt. Om ej annat anges i texten får kända satser användas utan bevis.

Bonus: Den som har minst 5 poäng från årets hemuppgifter hoppar över uppgift 1(a). Den som har minst 9 poäng från något års hemuppgifter hoppar över hela uppgift 1.

För godkänt krävs 25 poäng. 23–24 poäng ger möjlighet att komplettera inom tre veckor efter att tentamensresultatet har anslagits. Kontakta examinator.

Behandla endast en uppgift per blad. Numrera sidorna och skriv namn på varje blad.

---

1. (a) Ett företag har två fabriker, F1 och F2, och fyra kunder, K1, K2, K3 och K4. Vid ett visst tillfälle efterfrågar kunderna följande kvantiteter av företagets produkt:
K1: 70 ton, K2: 60 ton, K3: 50 ton, K4: 40 ton.
Fabrikernas tillgångar av produkten vid det aktuella tillfället är:
F1: 105 ton, F2: 115 ton.

Transportkostnaderna från fabriker till kunder, i sorten hundralappar per ton, ges av följande tabell:

	K1	K2	K3	K4
F1	7	6	8	6
F2	6	4	5	3

Man vill bestämma hur mycket företaget bör transportera från respektive fabrik till respektive kund för att totala transportkostnaden ska minimeras under bivillkoren att kundernas efterfrågan tillgodoses och fabrikernas tillgångar ej överskrids.

Visa att följande transportplan (i sorten ton) ger en optimal lösning. . . . .(5p)

	K1	K2	K3	K4
F1	70	35		
F2		25	50	40

Ledning: Problemet kan formuleras som ett minkostnadsflödesproblem i ett visst nätverk med sex noder.

(b) I denna uppgift är $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Bestäm en bas till vart och ett av de båda underrummen $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ och $\mathcal{N}(\mathbf{A})^\perp$, dvs nollrummet till $\mathbf{A}$ och ortogonala komplementet till detta nollrum.
Ligger vektorn $\mathbf{x} = (6, -3, -2, -1)^\mathsf{T}$ i något av dessa underrum?
Motivera svaret. . . . . (4p)

2. Betrakta följande linjära optimeringsproblem:

$$\begin{aligned} \text{minimera} \quad & x_1 + x_2 + 4x_3 \\ \text{då} \quad & x_1 + x_2 \geq 2, \\ & x_1 + x_3 \geq 2, \\ & x_2 + x_3 \geq 2, \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

(a) Transformera problemet till standardform och lös det med simplexmetoden. Du måste starta med att låta x_1, x_2 och x_3 vara basvariabler (vilket visar sig ge en tillåten men inte optimal baslösning). . . . . (7p)

(b) Formulera det motsvarande duala LP-problemet och ange en optimal lösning till detta. Kontrollera speciellt att optimalvärdena är lika. . . . . (3p)

Frivillig räknehjälp till (a)-uppgiften: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

3. Betrakta det ickelinjära optimeringsproblemet att minimera $f(\mathbf{x})$ utan bivillkor, då $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^\mathsf{T} \in I\!R^3$ och funktionen $f : I\!R^3 \to I\!R$ ges av

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{3} (x_j^4 + x_j^3 + x_j^2 + x_j).$$

(a) Välj startpunkten $\mathbf{x}^{(1)} = (1, 0, -1)^\mathsf{T}$ och utför en fullständig iteration med Newtons metod, dvs beräkna $\mathbf{x}^{(2)}$. . . . . (6p)

(b) Avgör om f är en konvex funktion på hela $I\!R^3$. . . . . (4p)

(c) Bestäm en underskattning av optimalvärdet till ovanstående problem, dvs ett tal L sådant att $f(\mathbf{x}) \geq L$ gäller för alla $\mathbf{x} \in I\!R^3$.
Ju högre underskattning L du bestämmer desto fler poäng får du. . . . . (3p)

4. Denna uppgift handlar om ett 3-dimensionellt fackverk med 6 noder och 5 stänger, men man behöver *inte* kunna något om fackverk för att lösa uppgiften!

De sex nodernas koordinater (i x-, y- och z-led) ges i tur och ordning av:
(–1, 0, 0), (0, –1, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 0) och (0, 0, 1).
De fem stängerna förbinder noderna enligt följande:
Stång 1 förbinder noderna 1 och 6, stång 2 förbinder noderna 2 och 6,
stång 3 förbinder noderna 3 och 6, stång 4 förbinder noderna 4 och 6,
och stång 5 förbinder noderna 5 och 6.
Noderna 1–5 är samtliga "fixerade" (fastsatta i berg) medan nod 6 är "fri".

I nod 6 (den fria noden) appliceras nu en given yttre kraft $\mathbf{p} = (p_x,\, p_y,\, p_z)^\mathsf{T}$.
Detta förorsakar normalkrafter $f_1,\, f_2,\, f_3,\, f_4,\, f_5$ i de fem stängerna, där $f_j > 0$ betyder drag medan $f_j < 0$ betyder tryck. Uppgiften går ut på att bestämma dessa normalkrafter genom att lösa ett visst optimeringsproblem.

Vi får följande tre villkor för kraftjämvikt i denicke-fixerade noden (dvs nod 6):

$$
\begin{array}{ccccccccccccl}
f_1/\sqrt{2} & & & - & f_3/\sqrt{2} & & & & & = & p_x & & \text{(kraftjämvikt i x-led)},\\
 & & f_2/\sqrt{2} & & & - & f_4/\sqrt{2} & & & = & p_y & & \text{(kraftjämvikt i y-led)},\\
f_1/\sqrt{2} & + & f_2/\sqrt{2} & + & f_3/\sqrt{2} & + & f_4/\sqrt{2} & + & f_5 & = & p_z & & \text{(kraftjämvikt i z-led)}.
\end{array}
$$

Bland alla vektorer $\mathbf{f} = (f_1,\, f_2,\, f_3,\, f_4,\, f_5)^\mathsf{T}$ som uppfyller dessa jämviktsvillkor så väljer naturen den vektor $\hat{\mathbf{f}}$ som minimerar den kvadratiska funktionen

$$\tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{5} c_j f_j^2 \quad (= \text{totala töjningsarbetet}),$$

där konstanterna c_j ges av $c_j = L_j/(A_j E)$. Här är $A_j = j$:te stångens tvärsnittsarea, $L_j = j$:te stångens längd, $E =$ materialets elasticitetsmodul.

Antag att det för vårt fackverk gäller att $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = c_5 = 10^{-3}$, och att man applicerar lastvektorn $\mathbf{p} = (3,\, 2,\, 12)^\mathsf{T}$. Din uppgift är att bestämma den optimala lösningen $\hat{\mathbf{f}}$ till ovanstående kvadratiska optimeringsproblem med linjära bivillkor, och sålunda bestämma normalkrafterna i stängerna. .... (9p)

5. (a) Låt E_2 vara ellipsen definerad av ekvationen $\dfrac{x_1^2}{a_1^2} + \dfrac{x_2^2}{a_2^2} = 1$,
där a_1 och a_2 är två givna positiva konstanter.
I denna deluppgift ska du bestämma en rektangel med maximal area bland alla rektanglar som har sidorna parallella med koordinataxlarna och som får plats inuti ellipsen. Du kan förutsätta att rektangeln har sin tyngdpunkt i origo och sina fyra hörn i punkter (x_1, x_2), $(-x_1, x_2)$, $(x_1, -x_2)$ på $(-x_1, -x_2)$ som ligger på ellipsen.
Formulera detta som ett ickelinjärt optimeringsproblem med bivillkor.
Ställ upp relevanta optimalitetsvillkor för problemet, och bestäm med hjälp av dessa den optimala rektangelns mått och area. . . . . (4p)

(b) Låt nu E_3 vara ellipsoiden definerad av ekvationen $\dfrac{x_1^2}{b_1^2} + \dfrac{x_2^2}{b_2^2} + \dfrac{x_3^2}{b_3^2} = 1$,
där b_1, b_2 och b_3 är tre givna positiva konstanter,
I denna deluppgift ska du bestämma en låda (rätblock) med maximal volym bland alla lådor som har sidorna parallella med koordinatplanen och som får plats inuti ellipsoiden.
Du kan förutsätta att lådan har sin tyngdpunkt i origo och sina åtta hörn i punkter $(\pm x_1, \pm x_2, \pm x_3)$ som ligger på ellipsoiden.
Formulera detta som ett ickelinjärt optimeringsproblem med bivillkor.
Ställ upp relevanta optimalitetsvillkor för problemet, och bestäm med hjälp av dessa den optimala lådans mått och volym. . . . . (5p)

Lycka till!