KTH Matematik

Tentamen i SF1861 Optimeringslära.
Torsdag 1 juni 2017 kl. 8.00–13.00

Examinator: Krister Svanberg, tel. 790 71 37.

Tillåtna hjälpmedel: Penna, suddgummi och linjal. **Ej räknare!** Ett formelblad delas ut.

Lösningsmetoder: Om ej annat anges i texten skall problemen lösas med systematiska metoder som ej blir orimliga vid stora problem. Slutsatser ska motiveras ordentligt. Om ej annat anges i texten får kända satser användas utan bevis.

Bonus: Den som har minst 5 poäng från årets hemuppgifter hoppar över uppgift 1(a). Den som har minst 9 poäng från något års hemuppgifter hoppar över hela uppgift 1.

För godkänt krävs 25 poäng. 23–24 poäng ger möjlighet att komplettera inom tre veckor efter att tentamensresultatet har anslagits. Kontakta examinator.

Behandla endast en uppgift per blad. Numrera sidorna och skriv namn på varje blad.

---

1. (a) I denna deluppgift behandlas ett riktat nätverk med fyra noder och fem bågar. Två av noderna, *nod 1* och *nod 2*, är källnoder, med tillgången 70 enheter i nod 1 och 30 enheter i nod 2. De återstående två noderna, *nod 3* och *nod 4*, är sänknoder, med efterfrågan 40 enheter i nod 3 och 60 enheter i nod 4.
De fem bågarna i nätverket är $(1,2)$, $(1,3)$, $(2,3)$, $(2,4)$ och $(3,4)$, där (i,j) betecknar den riktade bågen från nod i till nod j.
För var och en av de fem bågarna är kostnaden 1 SEK per enhet flöde i bågen.
Det motsvarande minkostnadflödesproblemet kan (som bekant) formuleras som ett LP-problem på standardformen
minimera $\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x}$ då $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ och $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, där variabelvektorn ges av
$\mathbf{x} = (x_{12}, x_{13}, x_{23}, x_{24}, x_{34})^\mathsf{T}$, med x_{ij} = flödet från nod i till nod j i bågen (i,j),
och kostnadsvektorn ges av $\mathbf{c} = (c_{12}, c_{13}, c_{23}, c_{24}, c_{34})^\mathsf{T} = (1,1,1,1,1)^\mathsf{T}$.
(i): Ange vad matrisen $\mathbf{A}$ och vektorn $\mathbf{b}$ är för just detta exempel! ..... (2p)
Eftersom den totala efterfrågan är lika med den totala tillgången så är det ett *balanserat* minkostnadsflödesproblem, och då motsvarar varje *uppspännande träd* i nätverket en *baslösning* till LP-problemet.
Betrakta de två uppspännande träd som definieras av bågmängderna
$T_1 = \{(1,2), (2,3), (2,4)\}$ och $T_2 = \{(1,3), (2,4), (3,4)\}$.
(ii): För vart och ett av dessa bägge uppspännande träd, beräkna den motsvarande baslösningen $\mathbf{x}$, samt avgör om denna baslösning $\mathbf{x}$ är en optimal lösning till minkostnadsflödesproblemet. .... (3p)

(b) I denna deluppgift är $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 7 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ 2 \end{pmatrix}$,
där b är ett reellt tal. Besvara följande båda frågor:
Finns det något värde på talet b för vilket $\mathbf{w}$ tillhör bildrummet för $\mathbf{A}$, dvs $\mathbf{w} \in \mathcal{R}(\mathbf{A})$? Ange i såfall ett sådant värde på b.
Finns det något värde på talet b för vilket $\mathbf{w}$ tillhör nollrummet för $\mathbf{A}^\mathsf{T}$, dvs $\mathbf{w} \in \mathcal{N}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$? Ange i såfall ett sådant värde på b. .... (4p)

2. Betrakta följande LP-problem på standardform:

$$
\begin{array}{lll}
\text{P1:} & \text{minimera} & -8x_1 + 8x_2 - 4x_3 + 12x_4 - x_5 - x_6 \\
& \text{då} & x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 200, \\
& & x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_6 = 100, \\
& & x_j \geq 0,\ j = 1, \ldots, 6.
\end{array}
$$

(a) Använd simplexmetoden på detta problem P1.
Starta med x_5 och x_6 som basvariabler.
Hittar du en optimal lösning till P1? Kommentera. .... (4p)

(b) Antag att målfunktionskoefficienten framför x_4 i P1 ändras från 12 till 6.
Kalla detta modifierade problem P2, och använd simplexmetoden på P2.
Starta med x_5 och x_6 som basvariabler.
Hittar du en optimal lösning till P2? Kommentera. .... (3p)

(c) Finns det i något av problemen P1 eller P2 en tillåten lösning $\tilde{\mathbf{x}}$ med målfunktionsvärdet $= -9000$? Ange i såfall en sådan tillåten lösning $\tilde{\mathbf{x}}$ och förklara om det är målfunktionen i P1 eller P2 som får det värdet. . . (2p)

(d) För vart och ett av ovanstående bägge problem (P1 och P2), formulera det motsvarande *duala* LP-problemet, samt illustrera bivillkoren till detta i en noggrann figur med den första dualvariabeln y_1 på den horisontella axeln och den andra dualvariabeln y_2 på den vertikala. Markera också det tillåtna området (om det existerar) i figuren. .... (3p)

3. I denna uppgift är $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(a) Visa att ekvationssystemet $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ inte har någon lösning. .... (1p)

(b) Bestäm *samtliga* optimala lösningar $\mathbf{x}$ till minsta-kvadratproblemet att minimera $\frac{1}{2}\|\mathbf{Ax}-\mathbf{b}\|^2$ då $\mathbf{x} \in I\!R^3$. .... (3p)

(c) Låt $\mathcal{S}$ beteckna mängden av optimala lösningar till minsta-kvadratproblemet i (b) ovan. Bestäm den vektor $\hat{\mathbf{x}} \in \mathcal{S}$ som är *kortast* bland alla vektorer i $\mathcal{S}$, dvs uppfyller $\frac{1}{2}\|\hat{\mathbf{x}}\|^2 \leq \frac{1}{2}\|\mathbf{x}\|^2$ för alla $\mathbf{x} \in \mathcal{S}$. .... (4p)

(d) Bestäm den vektor $\hat{\mathbf{y}} \in \mathcal{R}(\mathbf{A})$ (bildrummet till $\mathbf{A}$) som uppfyller att $\|\hat{\mathbf{y}}-\mathbf{b}\|^2 \leq \|\mathbf{y}-\mathbf{b}\|^2$ för alla vektorer $\mathbf{y} \in \mathcal{R}(\mathbf{A})$. Motivera ditt svar. ..... (2p)

Anmärkning: Som vanligt betyder $\|\mathbf{x}\|$ euklidiska normen av vektorn $\mathbf{x}$, dvs $\|\mathbf{x}\|^2 = \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{x}$, $\|\mathbf{Ax}-\mathbf{b}\|^2 = (\mathbf{Ax}-\mathbf{b})^\mathsf{T}(\mathbf{Ax}-\mathbf{b})$, $\|\mathbf{y}-\mathbf{b}\|^2 = (\mathbf{y}-\mathbf{b})^\mathsf{T}(\mathbf{y}-\mathbf{b})$.

4. Låt den ickelinjära tvåvariabelfunktionen $f : I\!R^2 \to I\!R$ definieras av

$$f(\mathbf{x}) = x_1^3 + x_2^3 - x_1 x_2, \quad \text{där } \mathbf{x} = (x_1, x_2)^\mathsf{T}.$$

(a) Välj startpunkten $\mathbf{x}^{(1)} = (1,\, 1)^\mathsf{T}$ och utför en fullständig iteration med *Newtons metod*. Kontrollera speciellt att $f(\mathbf{x}^{(2)}) < f(\mathbf{x}^{(1)})$. .... (5p)

(b) Beräkna (analytiskt) alla lokala minpunkter till $f(\mathbf{x})$, dvs alla lokalt optimala lösningar till problemet att minimera $f(\mathbf{x})$ utan några bivillkor. .... (3p)

(c) Inför den konvexa mängden $C = \{\, \mathbf{x} \in I\!R^2 \mid x_1 > 0.2 \text{ och } x_2 > 0.2 \,\}$.
Finns det någon vektor $\hat{\mathbf{x}} \in C$ sådan att $f(\hat{\mathbf{x}}) \le f(\mathbf{x})$ för alla $\mathbf{x} \in C$?
Motivera svaret noggrant. .... (2p)

5. Betrakta följande optimeringsproblem P med tre variabler och fyra olikhetsbivillkor:

$$\begin{aligned} \text{P:} \quad \text{minimera} \quad & \tfrac{1}{2}\left((x_1{+}2)^2 + (x_2{+}4)^2 + (x_3{+}6)^2\right) \\ \text{då} \quad & x_j \ge 0 \ \text{ för } j = 1, 2, 3, \\ \text{samt} \quad & x_1 + x_2 + x_3 \ge 3. \end{aligned}$$

(a) Ställ upp KKT-villkoren i detalj för detta problem P. .... (1p)

(b) Finns det någon vektor $\hat{\mathbf{x}} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)^\mathsf{T}$ med $\hat{x}_1 > 0$ och $\hat{x}_2 > 0$ som tillsammans med en vektor $\hat{\mathbf{y}} = (\hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{y}_3, \hat{y}_4)^\mathsf{T}$ uppfyller KKT-villkoren för P? Ange i såfall $\hat{\mathbf{x}}$ och $\hat{\mathbf{y}}$? .... (6p)

(c) Låt $f(\mathbf{x})$ beteckna målfunktionen i P.
Finns det något reellt tal $K > 38$ sådant att $f(\mathbf{x}) \ge K$ för alla tillåtna lösningar $\mathbf{x}$ till P? Ange i såfall ett sådant tal K. Motivera svaret noggrant. ..... (2p)

Lycka till!