KTH Matematik

Tentamen i SF1861 och SF1851 Optimeringslära.
Onsdag 3 juni 2015 kl. 14.00–19.00

Examinator: Krister Svanberg, tel. 790 71 37.

Tillåtna hjälpmedel: Penna, suddgummi och linjal. **Ej räknare!** Ett formelblad delas ut.

Lösningsmetoder: Om ej annat anges i texten skall problemen lösas med systematiska metoder som ej blir orimliga vid stora problem. Slutsatser ska motiveras ordentligt. Om ej annat anges i texten får kända satser användas utan bevis.

Bonus: Den som har minst 5 poäng från årets hemuppgifter hoppar över uppgift 1(a). Den som har minst 9 poäng från något års hemuppgifter hoppar över hela uppgift 1.

För godkänt krävs 25 poäng. 23–24 poäng ger möjlighet att komplettera inom tre veckor efter att tentamensresultatet har anslagits. Kontakta examinator.

Behandla endast en uppgift per blad. Numrera sidorna och skriv namn på varje blad.

---

1. (a) Ett visst litet nätverk har två källnoder, här kallade nod 1 och nod 2, med tillgången 500 enheter (för nod 1) respektive 400 enheter (för nod 2), och två sänknoder, här kallade nod 3 och nod 4, med efterfrågan 600 enheter (för nod 3) respektive 300 enheter (för nod 4). Det finns riktade bågar från varje källnod till varje sänknod, dvs fyra bågar (1,3), (1,4), (2,3) och (2,4), med givna kostnader c_{13}, c_{14}, c_{23} och c_{24} per flödesenhet i respektive båge.

Det motsvarande minkostnadflödesproblemet kan som bekant formuleras som ett LP-problem på standardform. **Gör det!** .... (2p)

Eftersom den totala efterfrågan är lika med den totala tillgången så är det ett *balanserat* flödesproblem, och då motsvarar varje *uppspännande träd* i nätverket en *baslösning* till ovannämnda LP-problem.

I det här aktuella exemplet finns fyra uppspännande träd (vart och ett betående av tre bågar). Rita dessa uppspännande träd i fyra separata figurer.

Beräkna sedan de motsvarande baslösningarna till LP-problemet, dvs flödena i bågarna för vart och ett av träden. Som du ser är det endast två av de fyra baslösningarna som är *tillåtna* baslösningar. Vilka två? .... (3p)

(b) I denna deluppgift är $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Bestäm en bas för vart och ett av följande fyra underrum:
$\mathcal{N}(\mathbf{A})$, $\mathcal{N}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$, $\mathcal{N}(\mathbf{A})^\perp$ och $\mathcal{N}(\mathbf{A}^\mathsf{T})^\perp$, dvs nollrummen till $\mathbf{A}$ och $\mathbf{A}^\mathsf{T}$ samt ortogonala komplementen till dessa båda nollrum. .... (4p)

2. Betrakta följande LP-problem P1 på standardform:

$$
\begin{array}{lll}
\text{P1:} & \text{minimera} & 5x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 8x_4 \\
& \text{då} & x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1, \\
& & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4, \\
& & x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4.
\end{array}
$$

(a) Visa att $(x_1,\, x_2,\, x_3, x_4) = (3,\, 0,\, 0,\, 1)$ är en optimal lösning till P1. ...... (3p)

(b) Antag att båda likhetsbivillkoren i P1 byts mot olikhetsbivillkor av typen $\geq$, så att följande problem P2 erhålls:

$$
\begin{array}{lll}
\text{P2:} & \text{minimera} & 5x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 8x_4 \\
& \text{då} & x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 \geq 1, \\
& & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 4, \\
& & x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4.
\end{array}
$$

Använd simplexmetoden för att beräkna en optimal lösning till P2.
Du kan använda resultaten från (a) ovan för att erhålla en tillåten baslösning att starta simplexmetoden från när du ska lösa P2. .... (5p)

(c) Formulera det duala LP-problemet D2 svarande mot det primala problemet P2. Illustrera D2 i en figur innehållande det tillåtna området för D2 och minst två olika nivålinjer för målfunktionen i D2.
Bestäm sedan, *med hjälp av din figur*, optimala lösningen till D2, och kontrollera att optimalvärdena till P2 och D2 är lika. .... (3p)

3. I denna uppgift är $f(\mathbf{x}) = 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_1x_2 - x_2x_3 - x_3x_1$.

(a) Avgör för vilket eller vilka (om något) av följande tre problem som $\hat{\mathbf{x}} = (1,1,1)^\mathsf{T}$ är en globalt optimal lösning. Motivera svaren ordentligt. .... (7p)

QP1: minimera $f(\mathbf{x})$ då $x_1 + x_2 + x_3 = 3$.

QP2: minimera $f(\mathbf{x})$ då $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$ och $x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$.

QP3: maximera $f(\mathbf{x})$ då $x_3 = 1$.

OBSERVERA att QP3 är ett *maximerings*problem!

(b) Om du för något eller några av ovanstående tre problem anger att $\hat{\mathbf{x}} = (1,1,1)^\mathsf{T}$ *inte* är en globalt optimal lösning ska du nu, för varje sådant problem, ange en annan tillåten lösning $\tilde{\mathbf{x}}$ med bättre funktionsvärde än $\hat{\mathbf{x}}$ (dvs $f(\tilde{\mathbf{x}}) < f(\hat{\mathbf{x}})$ för minimeringsproblem och $f(\tilde{\mathbf{x}}) > f(\hat{\mathbf{x}})$ för maximeringsproblem). .... (2p)

(c) Är $f(\mathbf{x})$ en konvex funktion eller en konkav funktion eller ingetdera?
Motivera svaret ordentligt. .... (2p)

4. Antag att m punkter med koordinaterna $(a_i,\, b_i)$, $i = 1, \ldots, m$, i planet är givna. Antag vidare att punkterna ser ut att ligga "nästan men inte riktigt" på en cirkel. Man vill då hitta den cirkel som "så bra som möjligt" ansluter till de givna punkterna. Frågan är vilken cirkel man ska välja.

(a) En rimlig matematisk modell för denna frågeställning är följande icke-linjära minsta-kvadratproblem i variablerna x, y and r :

$$\text{minimera} \quad f(x,y,r) = \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\left(\sqrt{(x-a_i)^2+(y-b_i)^2} - r\,\right)^2$$

där (x, y) betecknar koordinaterna för den sökta cirkelns centrum,
medan r betecknar dess radie.
Antag att $m = 4$ och att de givna punkterna har koordinaterna
$(12, 0)$, $(0, 10)$, $(-10, 0)$ och $(0, -8)$.
Välj startpunkten $(x, y, r) = (0, 0, 10)$ och genomför en fullständig iteration med *Gauss-Newtons method*.
Vad är de nya värdena på x, y och r efter denna iteration? ....(6p)

(b) Ett alternativt angreppssätt är att söka två cirklar C_1 och C_2 sådana att:

- C_1 och C_2 har gemensamt centrum, men C_2 har större radie än C_1.
- Varje given punkt (a_i, b_i) ligger antingen på randen till en av cirklarna eller strikt mellan de båda cirklarna (dvs innanför C_2 och utanför C_1).
- Arean mellan cirklarna är så liten som möjligt (under ovanstående krav).

Formulera detta som ett ickelinjärt optimeringsproblem med olikhetsbivillkor, där både målfunktionen och alla bivillkorsfunktioner är kontinuerligt deriverbara (dvs samtliga partiella derivator existerar och är kontinuerliga).
OBS: Du ska *inte* beräkna någon numerisk lösning. .... (3p)

5. Betrakta följande problem med olikhetsbivillkor, där k är en konstant.

$$\begin{aligned}\text{minimera} \quad & \tfrac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) \\ \text{då} \quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 4, \\ & x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \geq k.\end{aligned}$$

Ställ upp KKT-villkoren och använd dessa för att bestämma en globalt optimal lösning till problemet för vart och ett av nedanstående tre värden på konstanten k. Motivera att det verkligen är globalt optimala lösningar du bestämt. ....(10p)

(a) $k = 9$.

(b) $k = 11$.

(c) $k = 15$.

Lycka till!