Propriété de Liouville et vitesse de fuite du mouvement brownien.

Anders Karlsson [a,1], François Ledrappier [b,2]

[a] *Department of Mathematics, Royal Institute of Technology, 100 44 Stockholm, Suède*

[b] *Department of Mathematics, University of Notre Dame, Notre Dame, IN 46556, États-Unis*

Reçu le ***** ; accepté après révision le +++++

Présenté par

Résumé

Soit M une variété riemannienne complète connexe de courbure sectionnelle bornée. Si M est le revêtement régulier d'une variété de volume fini, alors il n'y a pas de fonctions harmoniques bornées non constantes si, et seulement si, la vitesse de fuite du mouvement brownien est nulle.

Abstract

Liouville property and the linear drift of the Brownian motion. Let M be a complete connected Riemannian manifold with bounded sectional curvature. Under the assumption that M is a regular covering of a manifold with finite volume, we establish that M is Liouville if, and only if, the linear rate of escape of Brownian motion on M vanishes.

Abridged English version

Let (M, g) be a complete connected Riemannian manifold. Associated to the metric is the Laplace-Beltrami operator Δ. A function f is *harmonic* if $\Delta f = 0$. We say that M is *Liouville* if all bounded and harmonic functions are constant.

Associated to Δ is a diffusion process B_t called *Brownian motion.* Here we establish a characterization, under some assumptions on M, of the nonexistence of nonconstant bounded harmonic functions:

Théorème 0.1 *Assume that (M, g) is a regular covering of a Riemannian manifold which has finite Riemannian volume and bounded sectional curvatures. Then M is Liouville if, and only if,*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} d(x_0, B_t) = 0 \ a.s..$$

[1] Supported by Swedish Research Council (VR) grant 2002-4771 and the Göran Gustafsson Foundation.

[2] Avec le soutien partiel de la NSF, grant DMS-0500630.

The "if" part was proved by Kaimanovich, see [K1], and below section 4. The proof of the new implication in Theorem 0.1 also uses the Furstenberg-Lyons-Sullivan discretization procedure. Let Γ be the covering group of isometries of M. In section 2, we recall the construction of a probability measure ν on Γ, with the following properties:

– There is a one-to-one correspondence between bounded harmonic functions on M and bounded functions on Γ which satisfy $f(\gamma) = \sum_{g \in \Gamma} f(g\gamma)\nu(g)$.
– If $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ are chosen independent and with distribution ν, then $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} d(x_0, \gamma_n \dots \gamma_1 x_0)$ exists. It vanishes a.e. if, and only if, $\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} d(x_0, B_t) = 0$ a.s..
– One can choose ν symmetric, i.e. such that for all γ in Γ, $\nu(\gamma^{-1}) = \nu(\gamma)$.

The first property goes back to Furstenberg ([F]) and has been systematically developed by Lyons and Sullivan ([LS]) and Kaimanovich ([K3]). The second one was observed in certain situations by Guivarc'h ([Gu]) and Ballmann ([B]). Babillot observed that the modified construction of [BL] has the symmetry property. Given the above, proving Theorem 0.1 mostly reduces to proving the analogous result for symmetric random walks. It is a result of Varopoulos ([V]) that if ν is symmetric and has finite support, then the Liouville property of the random walk implies that $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} d(x_0, \gamma_n \dots \gamma_1 x_0) = 0$. The measure ν given by the above construction never has finite support. We are able to use our recent extension of Varopoulos's theorem to measures with infinite support and first moment ([KL]). Details are to be found in the following sections.

1. Résultat principal.

Soit (M, g) une variété riemannienne complète connexe. On suppose que les courbures sectionnelles sont bornées. Soit Δ le laplacien sur M. Une fonction est dite *harmonique* si elle vérifie $\Delta f = 0$. La variété est dite *Liouville* si les seules fonctions harmoniques bornées sont les constantes. Le laplacien Δ définit une diffusion $Y_t(x, \omega), t \in \mathbb{R}_+, x \in M, \omega \in \Omega$, le *mouvement brownien* : Ω est un espace de probabilité et pour chaque $x \in M$, presque tout ω, $t \to Y_t(x, \omega)$ est une fonction continue de $\mathbb{R}^+$ dans M avec $Y_0(x, \omega) = x$ de telle sorte que le processus $Y_t(x, \omega)$ est un processus markovien de générateur Δ. Les liens entre mouvement brownien et théorie du potentiel sur M sont classiques, voir [Gr], [L] pour des présentations récentes. Dans cette note, nous voulons montrer :

Théorème 1.1 *Supposons que (M, g) est le revêtement régulier d'une variété de volume fini. Alors (M, g) est Liouville si, et seulement si, pour presque tout ω,*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} d(x_0, Y_t) = 0,$$

où d est la distance riemannienne sur M.

Pour avoir une telle équivalence, des conditions de symétries sont indispensables : par exemple, on obtient une variété complète non Liouville en reliant deux copies de $\mathbb{R}^d, d \geq 3$ par un tube compact (voir [KM]). La vitesse de fuite du mouvement brownien est bien sûr encore sous-linéaire. Inversement, on peut relier dans $\mathbb{R}^3$ euclidien les points de $\mathbb{Z}^3$ par des tubes (pour obtenir la surface d'un 'jungle gym' infini, qui est Liouville) et changer conformément la métrique pour obtenir une vitesse de fuite positive ([P]). Pour une surface, la propriété de Liouville est préservée par modification conforme de la métrique.

La propriété de Liouville pour les revêtements réguliers est déjà bien étudiée, en particulier dans le cas cocompact : si le groupe de revêtement Γ est nonmoyennable, alors la variété M n'est pas Liouville ([Gu]) ; si Γ est un groupe polycyclique, alors M est Liouville ([K2]). Mais il existe des exemples de revêtements moyennables de variétés compactes qui sont non-Liouville ([E]). Il suit de [K1] que (M, g) est Liouville si la vitesse de fuite est nulle (voir section 4). La preuve de la réciproque, et donc du théorème 1.1, repose sur le procédé de discrétisation de Furstenberg-Lyons-Sullivan qui associe au mouvement Brownien une *marche aléatoire* sur le groupe de revêtement Γ ([F], [LS]), la traduction des propriétés étudiées en propriétés analogues pour les marches aléatoires (en suivant [BL], [K1] et [K3]) et un résultat similaire au Théorème 1.1 pour les marches aléatoires ([KL]).

2. Discrétisation de Furstenberg-Lyons-Sullivan.

Nous suivons la présentation de [BL]. Soit x_0 un point de M et $\delta > 0$ tel que les images $\gamma B(x_0, \delta), \gamma \in \Gamma$, sont disjointes. Comme M/Γ est de volume fini et que la courbure de Ricci est bornée, la réunion des $\gamma B(x_0, \delta), \gamma \in \Gamma$, est un ensemble récurrent : presque toute trajectoire y revient infiniment souvent, puisque cela revient à vérifier cette propriété sur M/Γ. Notons $G(x, z)$ la fonction de Green de $B(x_0, \delta)$, et posons, pour un $D > 0$, $F := \{z \in B(x_0, \delta) : G(x_0, z) \geq D\}$. Alors, il existe un nombre $\delta' > 0$ tel que :

$$x_0 \ \in B(x_0, \delta') \ \subset F \ \subset B(x_0, \delta).$$

Le système (F_γ, V_γ), où $F_\gamma = \gamma F, V_\gamma = \gamma B(x_0, \delta)$, est un système de données de LS équilibrées (balanced LS-data *in* [BL]) qui permettent de définir une mesure ν sur Γ par le procédé suivant : Soit $W = \{w(t)\}$ l'espace des chemins continus de $\mathbb{R}^+$ dans M. Si $w(0)$ est inclus dans F_γ, on définit $S(w)$ par :

$$S(w) \ = \ \inf\{t \geq 0; w(t) \notin V_\gamma\}.$$

Pour $x \in \cup_\Gamma F_\gamma$, la distribution de la variable $Y_{S(Y(x,\omega))}(x, \omega)$ est une mesure de probabilité $\varepsilon(x)$ portée par la frontière de l'ensemble V_γ contenant x. Soit C tel que, pour tout z appartenant à F_γ, la densité $\frac{d\varepsilon(z,V_\gamma)}{d\varepsilon(x_0,V_\gamma)}$ vérifie, pour tout y de la frontière de V_γ :

$$\frac{1}{C} \ \leq \ \frac{d\varepsilon(z, V_\gamma)}{d\varepsilon(x_0, V_\gamma)}(y) \ \leq \ C.$$

On définit alors successivement, pour un chemin w partant de x_0 les temps d'arrêt $R_n, n \geq 1$ et $S_n, n \geq 0$ par

$$\begin{aligned} S_0(w) = S(w) \ \text{ et } \ R_n(w) &= \inf\{t \geq S_{n-1}(w); w(t) \in \cup_\Gamma F_\gamma\} \\ S_n(w) &= \inf\{t \geq R_n(w); w(t) \notin \cup_\Gamma V_\gamma\}, \end{aligned}$$

puis, sur $W \times [0,1]^{\mathbb{N}}$, les temps d'arrêt $N_k, k \geq 0$ par :

$$N_0(w, \alpha) = 0 \text{ et } N_k(w, \alpha) = \inf\{n > N_{k-1}(w, \alpha) : \alpha_n < \kappa_n(w)\},$$

où

$$\kappa_n(w) \ = \ \frac{1}{C} \frac{d\varepsilon(\gamma_n(w)x_0, V_{\gamma_n(w)})}{d\varepsilon(w(R_n(w)), V_{\gamma_n(w)})}(w(S_n(w))$$

et $\gamma_n(w) \in \Gamma$ est tel que $w(R_n(w))$ appartienne à $F_{\gamma_n(w)}$.

Notons P_x la loi de $Y(x, \omega)$ et soit λ le produit des mesures de Lebesgue sur $[0,1]^{\mathbb{N}}$. Les deux propositions suivantes ont été montrées dans [LS] et [K3] :

Proposition 2.1 *Avec les notations ci-dessus, pour la mesure $P_{x_0} \times \lambda$, le processus $\gamma_{N_k(w,\alpha)}(w)$ décrit une marche aléatoire gauche sur Γ.*

Autrement dit, les variables $(\gamma_{N_{k+1}}(w)(\gamma_{N_k}(w))^{-1}, k \geq 1$, sont indépendantes et de loi ν, où ν est la distribution de $\gamma_{N_1}(w)$. Une fonction f sur Γ est dite ν-harmonique si elle satisfait $f(\gamma) = \sum_{g\in\Gamma} f(g\gamma)\nu(g)$. La marche (Γ, ν) est dite Liouville si les seules fonctions harmoniques bornées sont les constantes.

Proposition 2.2 *Avec les notations ci-dessus,* (Γ, ν) *est Liouville si, et seulement si,* (M, g) *est Liouville.*

En fait, l'énoncé montré dans [LS] et [K3] est que la restriction $f \mapsto (\gamma \mapsto f(\gamma x_0))$ établit un isomorphisme entre l'espace des fonctions harmoniques bornées sur M et l'espace des fonctions ν-harmoniques bornées sur Γ. De plus, le fait d'avoir des données de LS *équilibrées* assure que la fonction de Green de la marche aléatoire est proportionnelle à la restriction à Γx_0 de la fonction de Green du mouvement brownien. En particulier, la fonction de Green de la marche aléatoire est symétrique. D'où :

Proposition 2.3 *([BL], Theorem 2.7) Si le mouvement brownien est transient sur* M*, la mesure* ν *est symétrique : pour tout* γ *de* Γ, $\nu(\gamma^{-1}) = \nu(\gamma)$.

3. Vitesse de fuite.

Rappelons que P_x est la loi de $Y(x, \omega)$. Nous avons d'abord :

Proposition 3.1 *([Gu]) La variable* $\sup_{0\leq t\leq 1} d(x_0, w(t))$ *est intégrable pour la mesure* P_x.

Soient Y et Z deux variables aléatoires. Y est dite stochastiquement plus petite que Z si il existe un couplage $\mathbb{P}$ de Y et Z tel que $\mathbb{P}(Z < Y) = 0$. Soit alors κ un minorant des courbures sectionnelles de M. On sait ([IW], Theorem 5.1) que $\sup_{0\leq t\leq 1} d(x_0, w(t))$ est stochastiquement plus petite que la même variable sur l'espace simplement connexe de même dimension et de courbure κ. La propriété est classique pour les espaces de courbure constante.

Corollaire 3.2 *([Gu]) Pour tout* $x \in M$, P_x*-presque tout* $\omega \in \Omega$, *la limite* $\ell = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} d(x, Y_t)$ *existe. On l'appelle la* vitesse de fuite *du mouvement brownien.*

Notons π la projection de M sur M/Γ et aussi de $C(\mathbb{R}^+, M)$ sur $C(\mathbb{R}^+, M/\Gamma)$. Le volume riemannien définit sur M/Γ une mesure m qui est finie, invariante et ergodique par le mouvement brownien sur M/Γ. La mesure $P_m = \int P_x \circ \pi dm(x)$ sur $C(\mathbb{R}^+, M/\Gamma)$ est donc finie, invariante et ergodique par le décalage $\sigma_s \pi(w)(t) = \pi(w)(t + s)$. La famille de fonctions $d(w(0), w(t))$ est sous-additive et, grâce à la proposition 3.1, on peut lui appliquer le théorème ergodique sous-additif de Kingman. Cela montre le corollaire pour Lebesgue presque tout x de M/Γ, et donc de M. En utilisant la propriété de Markov, le corollaire suit pour tout $x \in M$.

Pour étudier la quantité analogue associée à la marche aléatoire (Γ, ν), on montre d'abord :

Proposition 3.3 *Il existe* M *tel que, pour tout* $z \in \cup_\Gamma \partial V_\gamma$, $\int S_{N_1}(w, \alpha) P_z \times \lambda \leq M$.

Observons que, pour tout n tout w, $\kappa_n(w) > 1/C^2$. La variable aléatoire $N_1(w, \alpha)$ est donc plus petite que la variable $N_1'(w, \alpha) = \inf\{n > 0 : \alpha_n < 1/C^2\}$. Comme cette variable est indépendante de w et intégrable, il suffit de majorer les intégrales de $S_n(w) - S_{n-1}(w)$ uniformément en n. Par récurrence du mouvement brownien sur M/Γ, $S_{n-1}(w)$ est P_z presque sûrement fini. En utilisant la propriété de Markov forte, on voit qu'il suffit de majorer, indépendamment de $z \in \partial B(x_0, \delta)$, l'intégrale $\int S_1(w) dP_z(w)$. La variable $S_1(w)$ est donnée par $S_1(w) = R_1(w) + S_1(w) - R_1(w)$. La fonction $T(z) := \int R_1(w) dP_z(w)$ est la moyenne du temps d'entrée dans F de la courbe w projetée sur M/Γ. Si elle n'est pas infinie, elle satisfait $\Delta T = -1$ et est donc continue et bornée sur $\partial B(x_0, \delta)$. La fonction T est finie car, d'après la formule de Kač,

$$\int_F \Big(\int_{(M/\Gamma)\setminus F} p_1(x, y) T(y) dy \Big) dm(x) \;\leq\; \int_F U(x) dm(x) \;\leq\; \frac{m(M/\Gamma)}{m(F)},$$

où $U(x)$ est la moyenne du premier temps entier où la trajectoire du mouvement brownien partant de x appartient à F. Enfin, comme la courbure est bornée supérieurement, on voit, par comparaison avec un espace simplement connexe de courbure constante que $\int(S_1 - R_1)(w)dP_z(w)$ est bornée pout tout z. La proposition est ainsi démontrée.

Soit z un point de $\cup_\Gamma \partial V_\gamma$. Sous la probabilité $P_z \times \lambda$, le processus $\{\pi(w(S_{N_k}))\}_{k\geq 1}$ est un processus de Markov stationnaire sur le compact $\pi(\partial V)$, dont la loi a une densité continue positive. La mesure invariante μ a une densité continue et positive sur $\pi(\partial V)$.

Corollaire 3.4 *Il existe un nombre S, $0 < S < \infty$ tel que pour $P_x \times \lambda$-presque tout (w, α), $\frac{S_{N_k}}{k}$ converge vers S. Le nombre S est donné par $S = \int_{\pi(\partial V)} \big(\int S_{N_1} dP_z \times d\lambda\big) d\mu(z)$.*

La convergence $\int(P_z \times \lambda)d\mu(z)$-presque sûre suit du théorème ergodique, et la limite est donnée par $S := \int_{\pi(\partial V)} \big(\int S_{N_1} dP_z \times d\lambda\big) d\mu(z)$. Il est clair que S est strictement positif.. La proposition 3.3 montre que S est fini. Par la propriété de Markov forte, la limite a lieu $P_x \times \lambda$-presque partout pout tout x.

Corollaire 3.5 *Pour $P_{x_0} \times \lambda$-presque tout (w, α), $\frac{d(x_0, w(S_{N_{k(w,\alpha)}}))}{k}$ converge vers $S\ell$.*

Il suffit en effet d'écrire

$$\frac{d(x_0, w(S_{N_{k(w,\alpha)}}))}{k} = \frac{S_{N_k}}{k} \frac{d(x_0, w(S_{N_k}))}{S_{N_k}}$$

et d'appliquer les corollaires 3.2 et 3.4.

Si on munit le groupe Γ de la distance invariante à droite $D(\gamma_1, \gamma_2) = d(\gamma_1^{-1}x_0, \gamma_2^{-1}x_0)$, on obtient :

Corollaire 3.6 *Pour $P_x \times \lambda$-presque tout (w, α), $\frac{D(\gamma_{N_{k(w,\alpha)}}(w), e)}{k}$ converge vers $S\ell$.*

4. Démonstration du Théorème 1.1.

Supposons que $\ell = 0$. Puisque les courbures sectionnelles sont bornées inférieurement sur M, la croissance du volume des boules de M est au plus exponentielle. Il s'ensuit que l'entropie du mouvement Brownien est nulle, et donc que (M, g) est Liouville (voir [K1]). D'autre part, si la variété M est récurrente, alors elle est Liouville. De plus, par récurrence, pour presque tout ω, $\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t} d(x, Y_t(\omega)) = 0$, et d'après le Corollaire 3.2, $\ell = 0$. Il suffit donc de considérer le cas où la variété M est transiente et de montrer qu'alors, si $\ell > 0$, (M, g) n'est pas Liouville.

Supposons que M est transiente et que $\ell > 0$. La démonstration du Théorème 1.1 repose sur son analogue discret. Soit Γ un groupe dénombrable, muni d'une distance D invariante à droite telle que les ensembles bornés sont finis. Soit ν une mesure de probabilité telle que le support de ν engendre Γ et satisfaisant la condition de moment $\sum_\Gamma D(\gamma, e)\nu(\gamma) < \infty$. On peut alors former la marche aléatoire gauche $Z_n = g_n g_{n-1} \cdots g_1$, où les g_i sont indépendants et de loi ν. La *vitesse de fuite* de la marche aléatoire est la limite presque sûre suivante :

$$\ell(\nu) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} D(Z_n, e).$$

Théorème 4.1 *([KL], Corollary 2) Soit Γ un groupe dénombrable, muni d'une distance D invariante à droite telle que les ensembles bornés sont finis. Soit ν une mesure de probabilité telle que le groupe engendré par le support de ν est Γ et satisfaisant la condition de moment $\sum_\Gamma D(\gamma, e)\nu(\gamma) < \infty$. Si ν est symétrique et $\ell(\nu) > 0$, alors (Γ, ν) n'est pas Liouville.*

Le Théorème 4.1 est énoncé dans [KL] pour une mesure centrée, la marche droite, une métrique invariante à gauche et des fonctions harmoniques à droite, et donc s'appliquerait ici à $\nu'(\gamma) := \nu(\gamma^{-1})$ au lieu de ν. Comme ν est symétrique, il s'applique également à ν.

D'après la Proposition 2.1 et le Corollaire 3.6, si ν est la distribution de $\gamma_{N_1(w,\alpha)}(w)$, alors $\ell(\nu) = S\ell > 0$. Vérifions que les hypothèses du Théorème 4.1 sont satisfaites. Les boules de M sont de volume fini. Comme les éléments de Γ sont associés à des boules disjointes de même volume, il n'y en a qu'un nombre fini dans un ensemble borné. Comme M est connexe, $\nu(g) > 0$ pour tout g de Γ, et donc la condition de support est satisfaite. D'après la Proposition 2.3, la mesure ν est symétrique. Reste à vérifier la condition de moment. La preuve est parallèle à la preuve de la Proposition 3.3. Le temps $N_1(w,\alpha)$ est plus petit que la variable $N_1'(w,\alpha) = \inf\{n > 0 : \alpha_n < 1/C^2\}$, qui est indépendante de w et intégrable. Compte tenu de la proposition 3.1, on conclut que $d(x_0, w(S_{N_1(w,\alpha)}))$ est $P_z \times \lambda$ intégrable, ce qui entraîne la condition de moment. Le Théorème 4.1 nous dit alors que (Γ, ν) n'est pas Liouville. D'après la Proposition 2.2, (M, g) n'est pas Liouville non plus et ceci achève la démonstration du Théorème 1.1.

Références

[B] Ballmann, W. : *On the Dirichlet problem at infinity for manifolds of nonpositive curvature.* Forum Math. **1** (1989), 201–213.

[BL] Ballmann, W. and Ledrappier, F. : *Discretization of positive harmonic functions on Riemannian manifolds and Martin boundary.* Actes de la Table Ronde de Géométrie Différentielle (Luminy, 1992), Sémin. Congr., **1**, Soc. Math. France, Paris, (1996), 77–92.

[E] Erschler, A. : *Liouville property for groups and manifolds.* Invent. Math. **155** (2004), 55–80.

[F] Furstenberg, H. : *Random walks and discrete subgroups of Lie groups.* Advances in Probability and related topics, **1** (1971), 1–63.

[Gr] Grigor'yan, A. : *Analytic and geometric background of recurrence and non-explosion of the Brownian motion on Riemannian manifolds.* Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **36** (1999), 135–249.

[Gu] Guivarc'h, Y. : *Sur la loi des grands nombres et le rayon spectral d'une marche aléatoire.* Astérisque, **74** (1980) 47–98.

[IW] Ikeda, N. and Watanabe, S. : *Stochastic differential equations and diffusion processes.* North Holland Mathematical Library, **24** (1989).

[K1] Kaimanovich, V. A. : *Brownian motion and harmonic functions on covering manifolds. An entropic approach.* (Russian) Dokl. Akad. Nauk SSSR **288** (1986), 1045–1049. English translation : Soviet Math. Dokl. **33** (1986), 812–816.

[K2] Kaimanovich, V. A. : *Boundaries of random walks on polycyclic groups and the law of large numbers for solvable Lie groups.* (Russian) Vestnik Leningrad. Univ. Mat. Mekh. Astronom. **112** (1987), vyp. 4, 93–95. English translation : Vetsnik Leningrad University : Mathematics. **20 :4** (1987), 49–52.

[K3] Kaimanovich, V. A. : *Discretization of bounded harmonic functions on Riemannian manifolds and entropy.* Potential theory (Nagoya, 1990), de Gruyter, Berlin, (1992), 213–223.

[KL] Karlsson A. and Ledrappier, F. : *Drift and Poisson boundaries for random walks.*, à paraître, Pure Appl. Math Quat..

[KM] Kuzmenko Yu.T. and Molchanov S.A. : *Counterexamples to Liouville-type theorems.* (inRussian) Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh., (1979) no.6, 39-43. Engl. transl. Moscow Univ. Math. Bull., **34** (1979) 35-39.

[L] Li, X.-D. : *Liouville theorems for symmetric diffusion operators on complete Riemannian manifolds.* J. Math. Pures Appl. (9) **84** (2005), no. 10, 1295–1361.

[LS] Lyons, T. and Sullivan, D. : *Function theory, random paths and covering spaces.* J. Differential Geom. **19** (1984), 299–323.

[P] Pinchover Y. : *On non-existence of any 0-invariant positive harmonic function, a counterexample to Stroock's conjecture.* Comm. Partial Differential Equations **20** (1995) 1831–1846.

[V] Varopoulos, N. Th. : *Long range estimates for Markov chains.*, Bull .Sci. Math. **109** (1985), 225–252.