Ex. 5.8 I

Betrakta

$$\text{maximera} \quad q^T x$$
$$\text{då} \quad Px \leq b$$
$$x \geq 0$$

där $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $q = [1 \ \ 1 \ \ 2]^T$

Använd simplexmetoden för att lösa problemet. Börja med slackvariablerna som basvariabler.

Bestäm två vektorer $x_0 \in \mathbb{R}^3$ och $d \in \mathbb{R}^3$ så att för $x(t) := x_0 + td$, $t \in \mathbb{R}$ så gäller att

(1) $x(t)$ är en tillåten lösning för varje $t > 0$ och

(2) $q^T x(t) \to +\infty$ då $t \to +\infty$.

Sätt upp problemet:

$$\max \quad x_1 + x_2 + 2x_3$$
$$\text{då} \quad x_1 - x_2 + x_3 \leq 1$$
$$x_1 + x_2 - x_3 \leq 1$$
$$x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0, \ x_3 \geq 0$$

Ej på standardform! /Vad göras?/

$$\min \ c^T x \qquad \qquad \min \ -x_1 - x_2 - 2x_3$$
$$\text{då} \ Ax = b \qquad \qquad \text{då} \quad x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1$$
$$x \geq 0 \qquad \qquad x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 1$$
$$x_1, \ldots, x_5 \geq 0$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$c = [-1 \quad -1 \quad -2 \quad 0 \quad 0]^T$$

Basvar. $\beta = [4 \quad 5]$ Icke-basvar. $\nu = [1 \quad 2 \quad 3]$

$$A_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A_\nu = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$c_\beta = [0 \quad 0] \qquad c_\nu = [-1 \quad -1 \quad -2]$$

Basvariablerna: $A_\beta \bar{b} = b$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \geq 0$$

/ Vad hade hänt om olikheten åt andra hållet? Ej tillåten baslösn. /

Simplex mult.: $A_\beta^T y = c_\beta$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow y = [0 \quad 0]^T$$

Red. kost. icke-basvar. $r_\nu = c_\nu - A_\nu^T y$ =

$$= \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$r_{\nu_3} = -2$ är minst, vi låter ν_3 motsvarande x_3 gå in i basen!

Vilken ska ut?

Beräkna $\bar{a}_3$ ur $A_\beta \bar{a}_3 = a_3$

$$A_\beta \bar{a}_3 = I \bar{a}_3 = a_3 \Rightarrow \bar{a}_3 = a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Bara en komponent > 0

Kvottest:

$$t_{max} = \min_i \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{3,i}}, \bar{a}_{3,i} > 0 \right\} = \frac{1}{1} = 1$$

β_1 skall ur basen. β_1 motsvarar 4, x_4 skall ut!

Ny bas: $\beta = [3 \ 5]$ $\nu = [1 \ 2 \ 4]$

$$A_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad A_\nu = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$c_\beta = [-2 \ 0] \qquad c_\nu = [-1 \ -1 \ 0]$$

Baslösning: $A_\beta \bar{b} = b$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \geq 0!$$

Simplex mult. $A_\beta^T y = c_\beta$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow y = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Red. kost. icke-basvar. $r_\nu = c_\nu - A_\nu^T y =$

$$= \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} \not\geq 0 \quad \text{Ej optimal.}$$

r_{ν_2} motsvarande x_2 skall in i basen!

Vilken skall ur?

Beräkna $\bar{a}_2$ ur $A_B \bar{a}_2 = a_2 \Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{a}_{2,1} \\ \bar{a}_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{a}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

I kvottestet tittar vi på kvoter då $\bar{a}_{2,i} > 0$.

$\bar{a}_2 \leq 0 \Rightarrow$ Det existerar ingen lösning.

Låt $x_2 = t$, t ökar från noll.

Icke-basvar $= 0$

Studera basvariabler

$$x_B(t) = \bar{b} - t\bar{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} t = \begin{bmatrix} 1+t \\ 2 \end{bmatrix} \geq 0 \quad \forall t \geq 0!$$

Vi har alltså
$$\begin{aligned} x_1(t) &= 0 \quad \text{(Icke-basvar)} \\ x_2(t) &= t \\ x_3(t) &= 1+t \\ x_4(t) &= 0 \\ x_5(t) &= 2 \end{aligned}$$

Titta på ursprungliga problemet:

x_1, x_2, x_3 variabler

$$\Rightarrow \quad x = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 1+t \end{bmatrix}$$

Bivillkoren:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 1+t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t+1+t \\ t-1-t \end{bmatrix} = \underset{\forall t}{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}} \leq \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = b$$

$x(t)$ kan skrivas som $x(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 1+t \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{:= x_0} + t \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{:= d}$

Vi har visat följande. (1)

(2): $q^T x(t) =$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 1+t \end{bmatrix} = t + 2 + 2t = 2 + 3t \to \infty$$

då $t \to \infty$