Exempel 5.8

Betrakta

$$\begin{aligned} \text{maximera} \quad & q^T x \\ \text{då} \quad & Px \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

där $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $q = [1 \ 1 \ 2]^T$.

Använd Simplexmetoden för att lösa problemet. Börja med slackvariablerna som basvariabler.

Bestäm två vektorer $x_0 \in \mathbb{R}^3$ och $d \in \mathbb{R}^3$ så att för $x(t) = x_0 + td$, $t \in \mathbb{R}$ så gäller att

(1) $x(t)$ är en tillåten lösning för varje $t > 0$ och

(2) $q^T x(t) \to +\infty$ då $t \to +\infty$

Sätt upp problemet:

maximera $x_1 + x_2 + 2x_3$

då $x_1 - x_2 + x_3 \leq 1$

$x_1 + x_2 - x_3 \leq 1$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0$

Problemet ej på standardform.

- Byt maximera $c^T x$ mot minimera $-c^T x$
- Inför en slackvariabel för varje bivillkor

Vi får då

minimera $-x_1 - x_2 - 2x_3$

då $x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1$

$x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 1$

$x_i \geq 0,\ i = 1, 2, 3, 4, 5$

På matrisform:

$$\min\ c^T x$$
$$\text{då } Ax = b$$
$$x \geq 0$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$c = [-1 \ \ -1 \ \ -2 \ \ 0 \ \ 0]^T$$

Basvariabler

$\beta = [4 \quad 5]$

$A_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$c_\beta = [0 \quad 0]^T$

Icke-basvariabler

$\nu = [1 \quad 2 \quad 3]$

$A_\nu = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

$c_\nu = [-1 \quad -1 \quad -2]^T$

Baslösning: $A_\beta \bar{b} = b$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \geq 0 \quad \text{ok!}$$

Simplexmultiplikatorer: $A_\beta^T y = c_\beta$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow y = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Reducerade kostnader, icke-basvariablerna:

$r_\nu = c_\nu - A_\nu^T y$:

$$= \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} \not\geq 0$$

$r_{\nu_3} = -2$ är minst, så vi låter $x_{\nu_3} = x_3$ gå in i basen.

Vilken variabel skall lämna basen?

Beräkna först $\bar{a}_3$ ur $A_\beta \bar{a}_3 = a_3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{a}_{3,1} \\ \bar{a}_{3,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Notera: Bara en komponent i $\bar{a}_3$ är strikt större än noll!

Kvottestet:

$$t_{max} = \min_k \left\{ \frac{\bar{b}_k}{\bar{a}_{3,k}} : \bar{a}_{3,k} > 0 \right\}$$

$$= \min \left\{ \frac{\bar{b}_1}{\bar{a}_{3,1}} \right\} = \frac{1}{1} = 1$$

$k=1$ ger det minimerande indexet, dvs β_1, vilket motsvarar 4, så x_4 skall lämna basen.

Ny bas:

Basvariabler

$\beta = [3 \quad 5]$

$$A_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$c_\beta = [-2 \quad 0]^T$

Icke-basvariabler

$\nu = [1 \quad 2 \quad 4]$

$$A_\nu = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$c_\nu = [-1 \quad -1 \quad 0]$

Baslösning: $A_\beta \bar{b} = b$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \geq 0 \text{ ok!}$$

Simplexmultiplikatorer: $A_\beta^T y = c_\beta$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow y = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Reducerade kostnader, icke-basvariabler:

$$r_\nu = c_\nu - A_\nu^T y$$

$$= \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} \ngeq 0$$

$r_{\nu_2} < 0$, så $x_{\nu_2} = x_2$ skall in i basen.

Vilken skall ur?

Beräkna $\bar{a}_2$ ur $A_\beta \bar{a}_2 = a_2$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{a}_{2,1} \\ \bar{a}_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{a}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

I kvottestet tittar vi på kvoter då $\bar{a}_{2,k} > 0$. När $\bar{a}_2 \leq 0$ innebär det att problemet saknar lösning.

För att se vad som händer då x_2 går in i basen, låt $x_2 = t$.

övriga icke-basvariabler är noll.

Uppfylls bivillkoren då t ökar från noll?

$Ax = b \;, x \geq 0$ blir

$A_\beta x_\beta + a_2 t = b \quad , x_\beta \geq 0 \quad \Longleftrightarrow$

$$x_\beta = A_\beta^{-1}(b - a_2 t) \quad , x_\beta \geq 0$$

$$= \underbrace{A_\beta^{-1} b}_{=\bar{b}} - \underbrace{A_\beta^{-1} a_2}_{=\bar{a}_2} t$$

$$= \bar{b} - \bar{a}_2 t$$

Med siffror insatta:

$$x_\beta = \bar{b} - \bar{a}_2 t = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} t = \begin{bmatrix} 1+t \\ 2 \end{bmatrix} \geq 0 \quad \forall t \geq 0$$

x_β tillåten för alla $t \geq 0$!

Vi har alltså:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \\ x_5(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 1+t \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Återgå nu till det ursprungliga problemet i 3 variabler: x_1, x_2, x_3.

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 1+t \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{x_0} + t \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{d}$$

Detta är våra kandidatvektorer till att uppfylla villkor (1) och (2).

<u>Verifiering av (1) (Tillåtenhet)</u>:

- $x(t) \geq 0 \quad \forall t$
- $Px \leq b$: $\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}}_{P} \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 1+t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t+1+t \\ t-1-t \end{bmatrix}$.

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = b$$

(Notera att första bivillkoret är uppfyllt med likhet, samt att dess slackvariabel $x_4 = 0$. På samma sätt är "slacket" i andra bivillkoret 2, dvs värdet på x_5.)

<u>Verifiering av (2)</u>:

$$q^T x(t) = [1 \quad 1 \quad 2] \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 1+t \end{bmatrix} = 2 + 3t \rightarrow \infty \text{ då } t \rightarrow \infty$$