Lagrangemetoden

Lösning av kvadratiska problem med linjära bivillkor.

$$(QP) \quad \begin{array}{ll} \min & \frac{1}{2} x^T H x + c^T x + c_0 \\ \text{då} & Ax = b \end{array}$$

d är en tillåten avtaganderiktning till (QP) om och endast om

- $d \in \ker(A)$ (1)
- $(Hx + c)^T \cdot d < 0$ (2)

(1) · $A\bar{x} = A(x+d) = Ax + \underbrace{Ad}_{=0} = Ax = b$

då $\bar{x} = x + d$

(Bivillkoren är uppfyllda om vi tar steget d)

(2) $\hat{x}$ är optimal till (QP) om och endast om

- $(H\hat{x} + c)^T d = 0 \quad \forall d \in \ker(A)$

(I optimala punkten finns ingen riktning som är tillåten och ger lägre målfunktionsvärde.)

Notera:

- $(H\hat{x}+c)^T d = 0 \iff H\hat{x}+c \perp d, \forall d \in \ker(A)$

- $d \in \ker(A) \Rightarrow H\hat{x}+c \in \ker(A)^{\perp} = \operatorname{ran}(A^T)$.

- $H\hat{x}+c \in \operatorname{ran}(A^T) \Rightarrow H\hat{x}+c = A^T u$

  för något u.

Detta ger

$$\begin{cases} H\hat{x}+c = A^T u \\ A\hat{x} = b \end{cases}$$

$$\iff$$

$$\begin{cases} H\hat{x} - A^T u = -c \\ A\hat{x} = b \end{cases}$$

$$\iff$$

$$\begin{bmatrix} H & -A^T \\ A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c \\ b \end{bmatrix}$$