Tentamen för T, 2008-08-26. ①

Uppg. 4.

$$\min \quad f(x) = e^{x_1} + e^{x_2} + x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2 - 3x_1 - 3x_2$$

a) Utför fullständig iteration med Newton's metod.
Utgå från punkten $x^{(1)} = (0,0)^T$
Ledning $e \approx 2.7$.

Enl. formelblad $F(x^{(k)})\underbrace{(x^{(k+1)} - x^{(k)})}_{= d^{(k)}} = -\nabla(f(x^{(k)}))^T$

$$F(x^{(k)})\, d^{(k)} = -\nabla f(x^{(k)})^T$$

$$\nabla^2 f(x^{(k)})\, d^{(k)} = -\nabla f(x^{(k)})^T$$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + d^{(k)}$$

Notera: Står ej men måste testas: $\nabla^2 f(x^{(k)}) > 0$

Gradienten:

$$\nabla f(x) = [e^{x_1} + 2x_1 - x_2 - 3 \ , \ e^{x_2} + 2x_2 - x_1 - 3]$$

$$\nabla^2 f(x) = F(x) = \begin{bmatrix} e^{x_1}+2 & -1 \\ -1 & e^{x_2}+2 \end{bmatrix}$$

I punkten $x^{(1)} = [0, 0]$

$$\nabla f(x^{(1)}) = [1-3\ ,\ 1-3] = [-2\ ,-2]$$

$$\nabla^2 f(x^{(1)}) = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \succ 0 \ ?$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \frac{8}{3} \end{bmatrix} \succ 0 \quad \text{P.D!}$$

Beräkna $d^{(1)}$:

$$\nabla^2 f(x^{(1)}) d^{(1)} = \nabla f(x^{(1)})^T \quad \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1^{(1)} \\ d_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad d^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Uppdatera x:

$$x^{(2)} = x^{(1)} + d^{(1)}$$

$$x^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Målfkn:

$$f(x^{(1)}) = 2$$

$$f(x^{(2)}) = 2e - 5 \approx 2 \cdot 2{,}7 - 5 < 1$$

$$f(x^{(2)}) < f(x^{(1)}) \qquad \text{ok!}$$

b) Avgör om f är konvex på hela $\mathbb{R}^2$. ③

Konvex om $\nabla^2 f(x) \succeq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^2$.

$$\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} e^{x_1}+2 & -1 \\ -1 & e^{x_2}+2 \end{bmatrix}.$$

LDL^T:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix}}_{E_1} \underbrace{\begin{bmatrix} e^{x_1}+2 & -1 \\ -1 & e^{x_2}+2 \end{bmatrix}}_{H}$$

$a(e^{x_1}+2) - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$$\boxed{a = \frac{1}{e^{x_1}+2}}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{e^{x_1}+2} & 1 \end{bmatrix}}_{E_1} \underbrace{\begin{bmatrix} e^{x_1}+2 & -1 \\ -1 & e^{x_2}+2 \end{bmatrix}}_{H} = \begin{bmatrix} e^{x_1}+2 & -1 \\ 0 & e^{x_2}+2-\frac{1}{e^{x_1}+2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} e^{x_1}+2 & -1 \\ 0 & e^{x_2}+2-\frac{1}{e^{x_1}+2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{e^{x_1}+2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{x_1}+2 & 0 \\ 0 & e^{x_2}+2-\frac{1}{e^{x_1}+2} \end{bmatrix}$$

Är $d_i > 0$, för alla x_1, x_2? • $e^{x_1}+2 > 0 \quad \forall x_1, x_2$ ok!

• $e^{x_2}+2 - \frac{1}{e^{x_1}+2} > 0 \Leftrightarrow (e^{x_2}+2)(e^{x_1}+2) - 1 > 0 \Leftrightarrow$

$\underbrace{(e^{x_2}+2)}_{>2}\underbrace{(e^{x_1}+2)}_{>2} > 1 \Rightarrow$ ok för alla x_1, x_2!