Newtonmetoden

Bygger på 2:a ordningens Taylorutveckling kring punkt $x^{(k)}$.

$$f(x^{(k)}+d) \approx f(x^{(k)}) + \nabla f(x^{(k)})^T d + \frac{1}{2} d^T F(x^{(k)}) d$$

där $x = x^{(k)} + d$.

$\nabla f(x^{(k)})$ gradient i $x^{(k)}$

$F(x^{(k)})$ Hessian i $x^{(k)}$

Kvadratisk funktion i d (d variabel)

Minimum fås ur

$$F(x^{(k)}) d = -\nabla f(x^{(k)}) \qquad (Hx = -c)$$

Vi kräver att $F(x^{(k)})$ är positivt definit

Gauss-Newton

Stegriktningen, d, ges av

$$\nabla h(x^{(k)})^T \nabla h(x^{(k)})\, d = -\nabla h(x^{(k)})^T h(x^{(k)}).$$

Nästa iterationspunkt blir

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + td \qquad t = 1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}, \ldots$$

där t bestämmer steglängden.

Minska t tills

$$f(x^{(k+1)}) < f(x^{(k)})$$

Tolkning av Gauss-Newton

1. Förenkling av Newtonmetoden.

Målfunktion: $f(x) = \frac{1}{2}|h(x)|^2$

$$\nabla f(x) = h(x)^T \nabla h(x)$$

$$\nabla^2 f(x) = F(x) = \nabla h(x)^T \nabla h(x) + \underbrace{\sum_i h_i(x) \nabla^2 h_i(x)}$$

Denna term stryks

2) Taylorutveckla avståndsfelen, $h_i(x)$, runt $x^{(k)}$ och linjärisera

$$h(x^{(k)}+d) \approx h(x^{(k)}) + \nabla h(x^{(k)})d \quad + \text{h.o.t.}$$

Vi får då

$$\min f(x^{(k)}+d) = \frac{1}{2}|h(x^{(k)}+d)|^2 \approx \frac{1}{2}|\underbrace{h(x^{(k)})}_{-b_k} + \underbrace{\nabla h(x^{(k)})}_{A_k}d|^2$$

$$= \frac{1}{2}|A^k d - b^k|^2$$

$$= \frac{1}{2}(A^k d - b^k)^T(A^k d - b^k)$$

$$= \frac{1}{2}d^T A^{kT} A^k d - b^T A^k d + \frac{1}{2} b^{kT} b^k$$

Lösningen ges av

$$A^{kT} A^k d = A^{kT} b \qquad (Hx = -c) \qquad (*)$$

dvs. $\nabla h(x^{(k)})^T \nabla h(x^{(k)}) d = -\nabla h(x^{(k)})^T h(x^{(k)})$

(*) kallas Normalekvationerna och löser linjära minsta-kvadratproblem