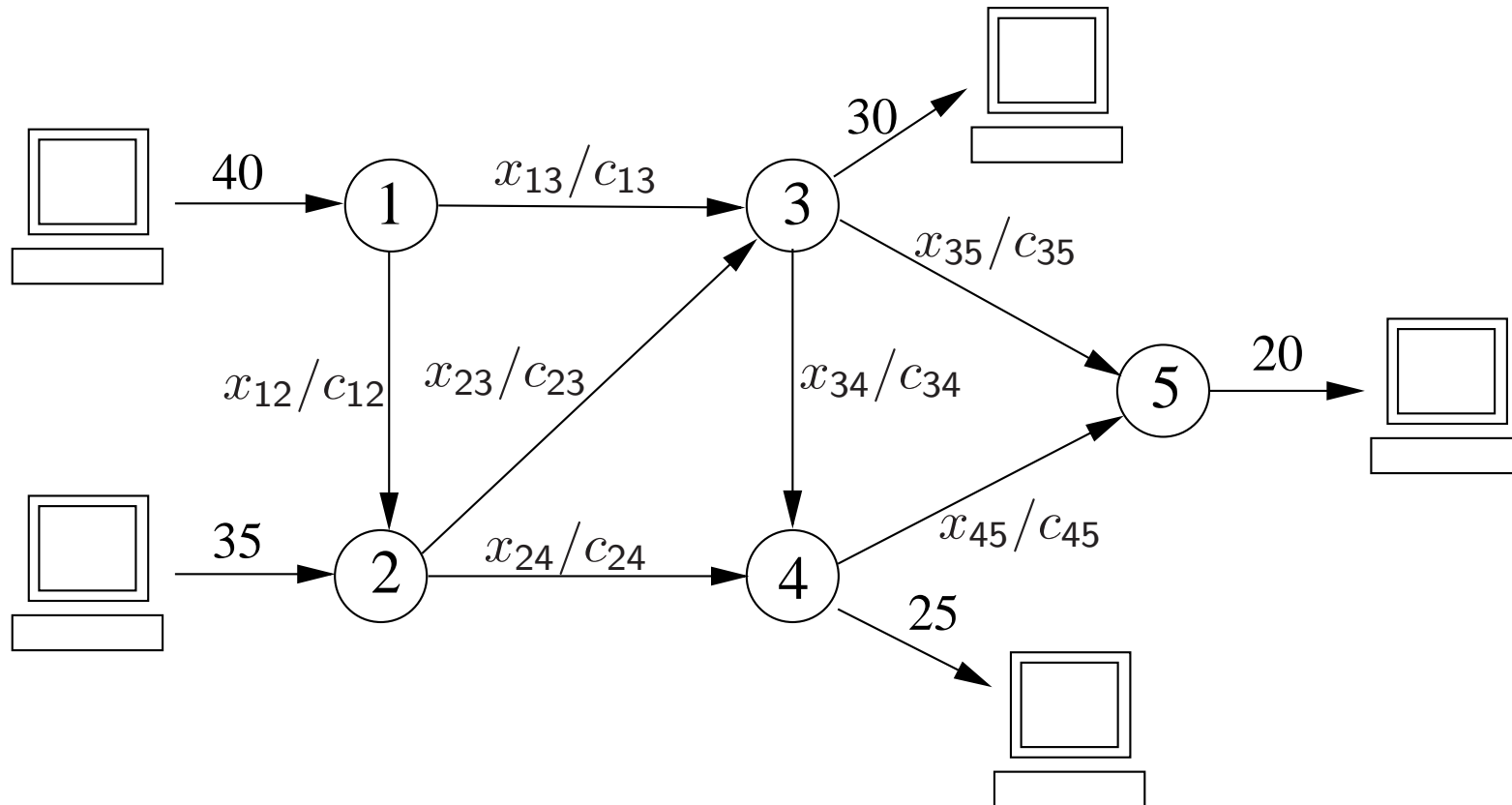




## Föreläsning 6: Nätverksoptimering

1. Minkostnadsflödesproblem i nätverk.
2. Modellering och grafteori.
3. Simplexmetoden.

# Minkostnadsflödesproblem i nätverk



Data skall skickas från servrar i nod 1 och 2 till terminaler i nod 3, 4, 5.

Kostnaden för trafik i länken mellan nod  $i$  och  $j$  är  $c_{ij}$  Kr/Kbyte.

Vi vill minimera kostnaden för den totala datatrafiken.

## Resultterande optimeringsproblem

minimera  $\sum$   $c_{ij}x_{ij}$   
alla bågar

$$\text{då } x_{12} + x_{13} = 40$$

$$-x_{12} + x_{23} + x_{24} = 35$$

$$-x_{13} - x_{23} + x_{34} + x_{35} = -30$$

$$-x_{24} - x_{34} + x_{45} = -25$$

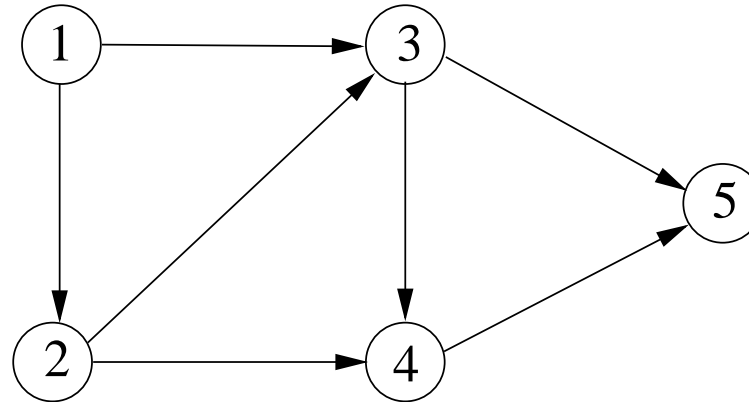
$$-x_{35} - x_{45} = -20$$

$$x_{ij} \geq 0, \text{ för alla bågar i grafen}$$

Vi kommer att behandla följande frågor

- Modellering av nätverksflödesproblem
  - Grafer, träd, cykler (slingor), uppspännande träd.
- Hur kan man utnyttja grafens speciella struktur i simplexmetoden.

## Modellering och grafteori



En riktad graf  $\mathcal{G} = (\mathcal{N}, \mathcal{B})$  består av en mängd *noder*  $\mathcal{N} = \{1, \dots, m\}$  och en mängd *bågar*  $\mathcal{B}$

- Bågen från nod  $i$  till nod  $j$  betecknas  $(i, j)$ .
- Vi skiljer på bågen  $(i, j)$  och bågen  $(j, i)$ .

I grafen ovan är

$$\mathcal{N} = \{1, \dots, 5\}$$

$$\mathcal{B} = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (3, 4), (3, 5), (4, 5)\}$$

Om vi ordnar bågarna i  $\mathcal{B}$  i någon ordning, t.e.x.

$$\mathcal{B} = \{(\underbrace{1}_{\rho_1}, \underbrace{2}_{\rho_2}), (\underbrace{1}_{\rho_2}, \underbrace{3}_{\rho_3}), (\underbrace{2}_{\rho_3}, \underbrace{3}_{\rho_4}), (\underbrace{2}_{\rho_4}, \underbrace{4}_{\rho_5}), (\underbrace{3}_{\rho_5}, \underbrace{4}_{\rho_6}), (\underbrace{3}_{\rho_6}, \underbrace{5}_{\rho_7}), (\underbrace{4}_{\rho_6}, \underbrace{5}_{\rho_7})\} \quad (1)$$

då definieras grafens anslutningsmatrix (incidensmatrix)  $\tilde{\mathbf{A}} \in \mathbf{R}^{m \times n}$  som

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{båge } \rho_j \text{ startar i nod } i \\ -1, & \text{båge } \rho_j \text{ slutar i nod } i \\ 0, & \text{annars} \end{cases} \quad (2)$$

Man ser enkelt att  $\mathbf{e}^T \tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{0}$ , där  $\mathbf{e}^T = [1 \ 1 \ \dots \ 1]$ . Raderna är därmed linjärt beroende och man kan stryka sista raden och få den reducerade anslutningsmatrixen  $\mathbf{A}$ .

För vårt exempel får vi

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## Vägar och cykler

- En *väg* från nod  $s$  till nod  $t$  i en riktad graf är en sammanhängande sekvens av bågar  $\rho_1, \dots, \rho_N$  där

$$\rho_k = (i_{k-1}, i_k), \text{ eller } \rho_k = (i_k, i_{k-1}), \text{ och } i_0 = s, i_N = t$$

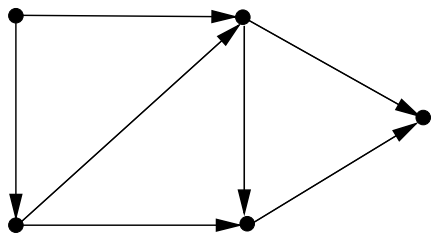
- En *riktad väg* från nod  $s$  till nod  $t$  i en riktad graf är en sammanhängande sekvens av bågar  $\rho_1, \dots, \rho_N$  där

$$\rho_k = (i_{k-1}, i_k), \text{ och } i_0 = s, i_N = t$$

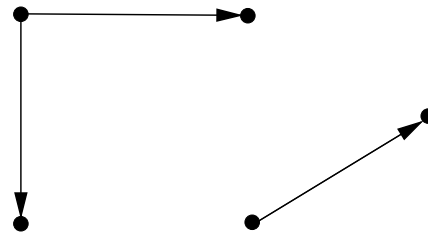
- En (*riktad*) *cykel* är en (*riktad*) *väg* från en nod till sig själv.



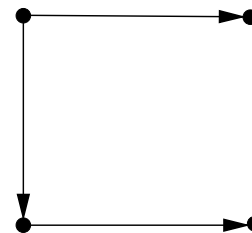
- En graf kallas *sammanhängande* om det existerar en väg mellan varje par av noder.
- En graf kallas *acyklisk* om den saknar cykler.
- Ett *träd* utgörs av en sammanhängande delmängd av bågarna i en graf som saknar cykler.
- I en graf med  $n$  noder utgör ett träd med  $n - 1$  bågar ett *uppspännande träd*.



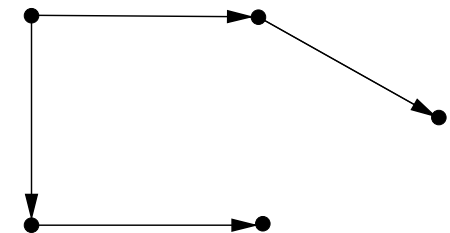
Sammanhängande graf  
Ej acyklisk



Acyklisk graf  
Ej sammanhängande

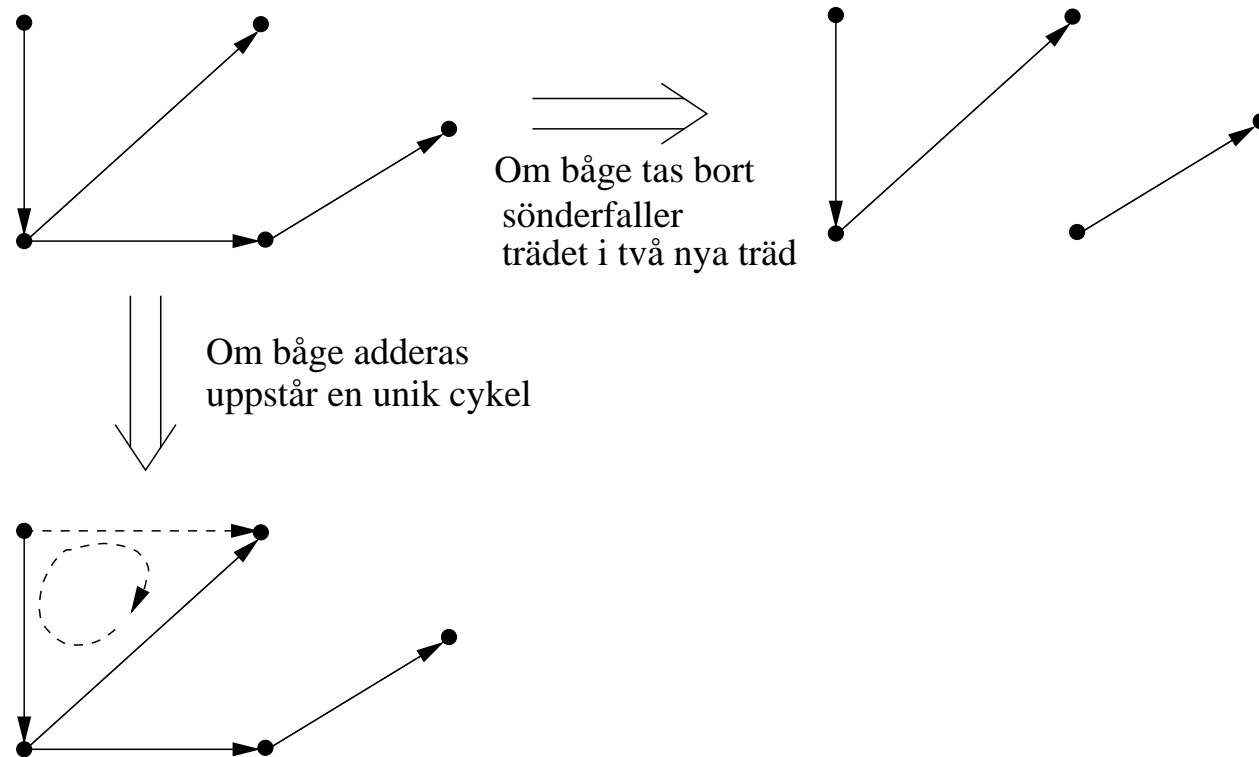


Träd

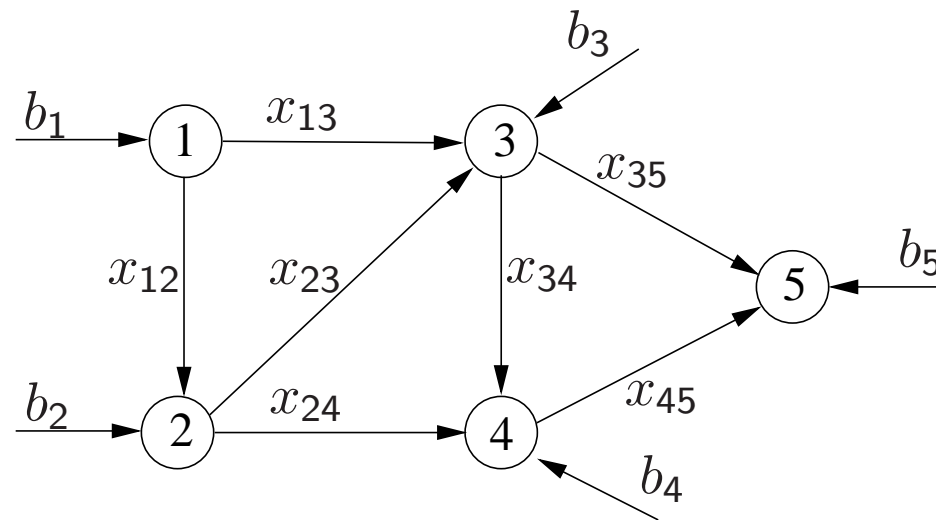


Uppspännande träd

- Om en båge adderas till ett uppspännande träd uppstår en unik cykel.
- Om en båge tas bort från ett uppspännande träd då sönderfaller trädet i två nya träd.



# Flödesbalans



- $x_{ij}$  betecknar flödet (datatrafik, olja, e.t.c.) i båge  $(i, j)$ 
  - Om flödet  $x_{ij}$  går i riktningen  $i \rightarrow j$  så är  $x_{ij} \geq 0$ . Annars  $x_{ij} \leq 0$ .
- $b_i$  betecknar externt in/ut flöde till nod  $i$ . Inflöde om  $b_i \geq 0$  och utflöde om  $b_i \leq 0$ .

Flödesbalans i nod  $i$  (utflödet = inflödet):

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_{ij} = b_i, \quad i = 1, \dots, n \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{b}}$$

I ovanstående balansekvation är  $\tilde{\mathbf{A}}$  grafens anslutningsmatris definierad i ekvation (2) och  $\mathbf{x}$  är en kolonnvektor med bågflödena  $x_{ij}$  sorterade i samma ordning som bågarna i ekvation (1). Slutligen är

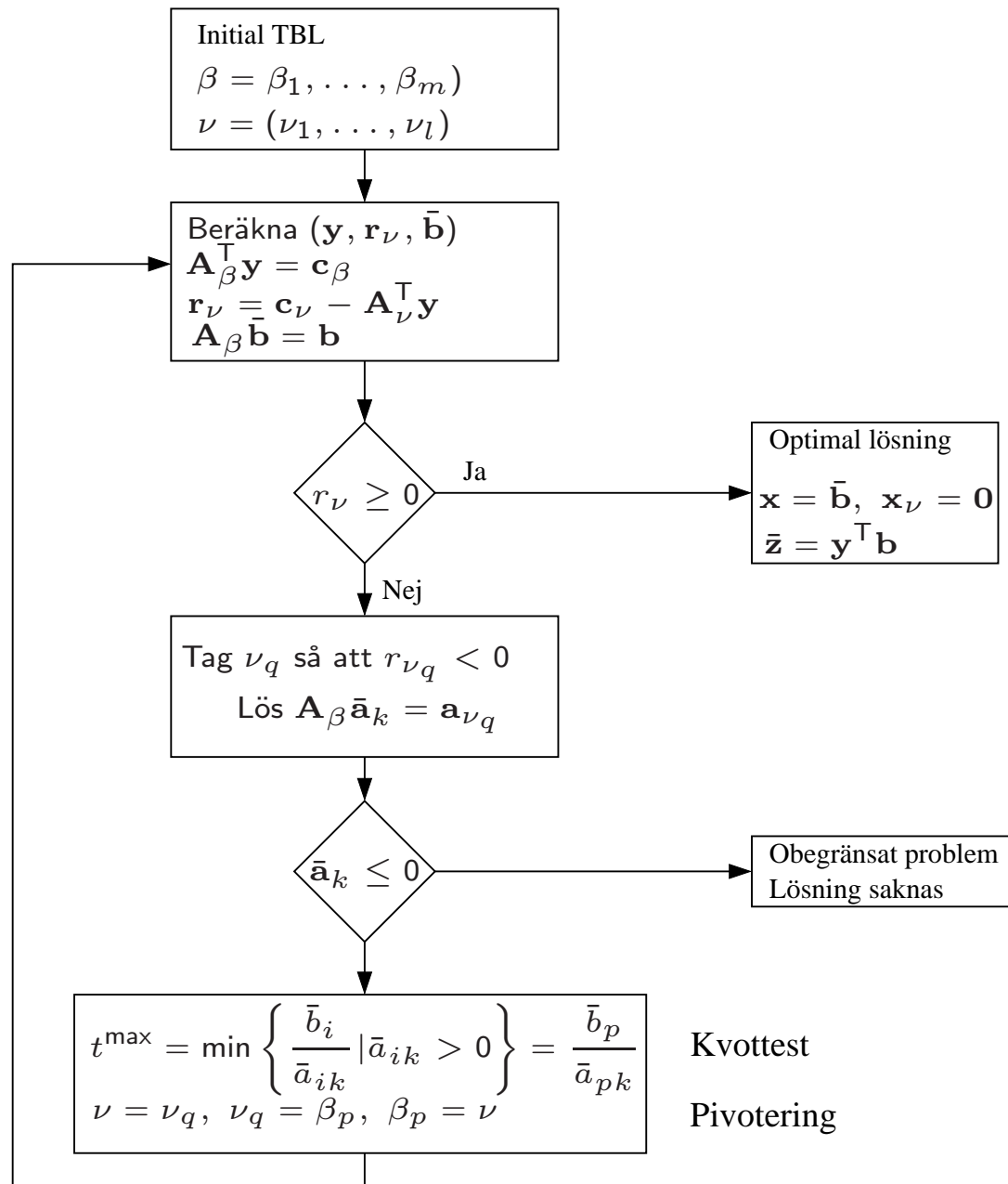
$$\tilde{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} b_1 & \dots & b_n \end{bmatrix}^T.$$

För att balansekvationen ska kunna lösas krävs det att

$\mathbf{e}^T \mathbf{b} = \sum_{i=1}^n b_i = 0$ . Under detta antagandet kan vi reducera flödesbalansekvationen genom att stryka sista raden i  $\tilde{\mathbf{A}}$  och  $\tilde{\mathbf{b}}$ , d.v.s. balansekvation nr.  $n$  är redundant.

Vi får då ekvationssystemet  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ , där  $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 & \dots & b_{n-1} \end{bmatrix}^T$ .

# Simplexalgoritmen (påminnelse)



För nätverksproblem förenklas simplexalgoritmen enligt följande

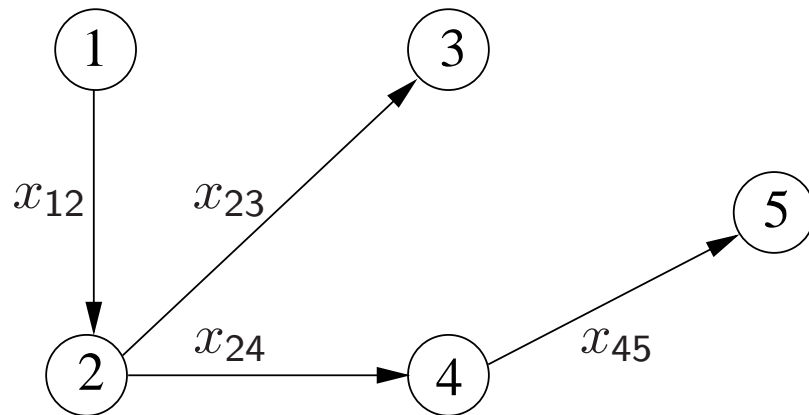
1. Bågarna svarande mot en basindexvektor svarar mot ett uppspännande träd
2. Basvariablerna som ges av  $\mathbf{A}_\beta \mathbf{x}_\beta = \mathbf{b}$  kan enkelt bestämmas med hjälp av flödesbalanser i det uppspännande trädet.
3. Simplexmultiplikatorerna som ges av  $\mathbf{A}_\beta^T \mathbf{y} = \mathbf{c}_\beta$  bestäms enkelt med hjälp av det uppspännande trädet.
4. Kvottestet sker genom att studera flödet i en cykel (slinga).
5. Pivoteringsen (byte av bas) sker genom att byta ut en båge i det uppspännande trädet.

Vi illustrerar med det inledande exemplet.

## Basmatriser svarar mot uppspännande träd

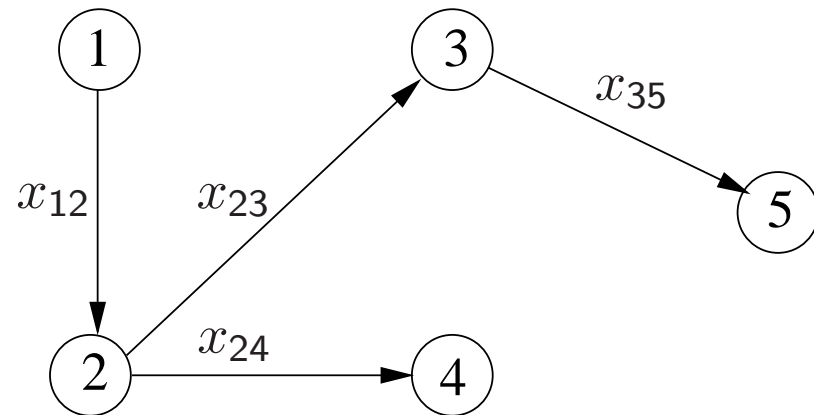
**Sats 1.**  $m - 1$  kolonner ur  $(m - 1) \times n$  matrisen  $\mathbf{A}$  i ett MKF-problem är linjärt oberoende om och endast om motsvarande  $m - 1$  bågar bildar ett uppspännande träd.

Figuren visar två baser och motsvarande uppspännande träd i grafen.



$$\mathcal{B}_\beta = \{(1, 2), (2, 3), (2, 4), (4, 5)\}$$

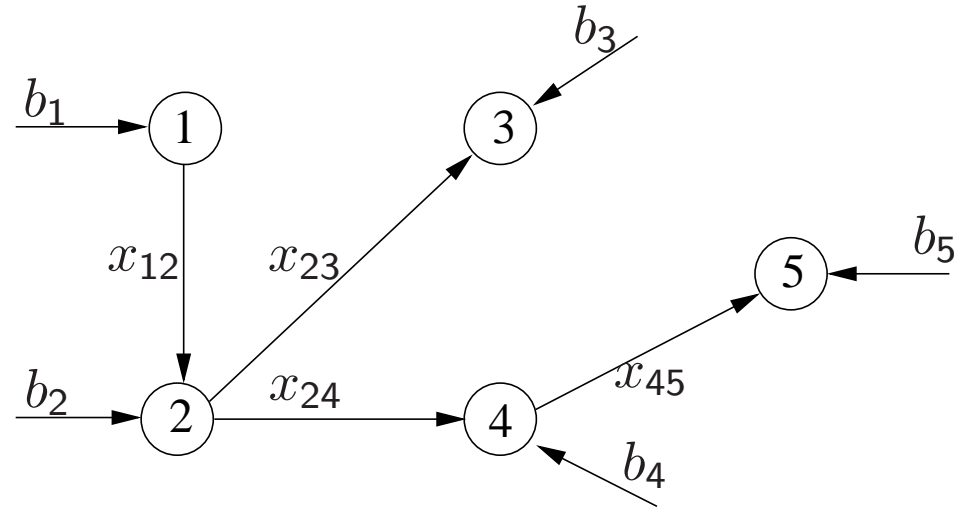
$$\mathbf{A}_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$



$$\mathcal{B}_\beta = \{(1, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 5)\}$$

$$\mathbf{A}_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

## Beräkning av baslösning $A_\beta \mathbf{x} = \mathbf{b}$



Basvariablerna kan bestämmas genom flödesbalanser i det uppspännande trädet, där de externa flödena ges av  $(b_1, b_2, b_3, b_4) = (40, 35, -30, -25)$ .

$$x_{12} = b_1 = 40$$

$$x_{23} = -b_3 = 30$$

$$x_{24} = b_2 + x_{12} - x_{23} = 45$$

$$x_{45} = x_{24} + b_4 = 20$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$



Vi kan även beräkna basflödet genom flödesbalanser “nedströms”

$$x_{45} = b_5 = 20$$

$$x_{24} = x_{45} - b_4 = 45$$

$$x_{23} = -b_3 = 30$$

$$x_{12} = x_{23} + x_{24} - b_2 = b_1 = 40$$

Förstår du varför?

Vi noterar att  $\mathbf{x}_\beta = \bar{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} \bar{b}_{12} \\ \bar{b}_{23} \\ \bar{b}_{24} \\ \bar{b}_{45} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 \\ 30 \\ 45 \\ 20 \end{bmatrix} \geq 0$  så vi har en tillåten baslösning.

## Beräkning av simplexmultiplikatorerna $\mathbf{y}^\top \mathbf{A}_\beta = \mathbf{c}_\beta^\top$

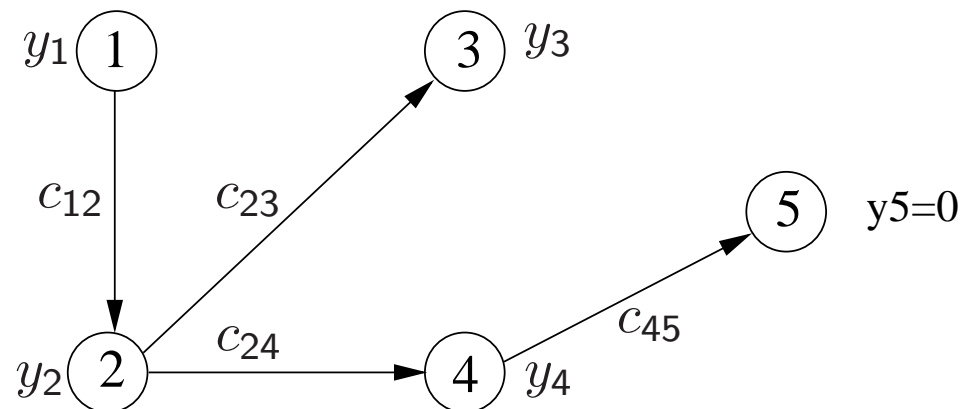
Simplexmultiplikatorerna bestäms av ekvationen  $\mathbf{y}^\top \mathbf{A}_\beta = \mathbf{c}_\beta^\top$ .

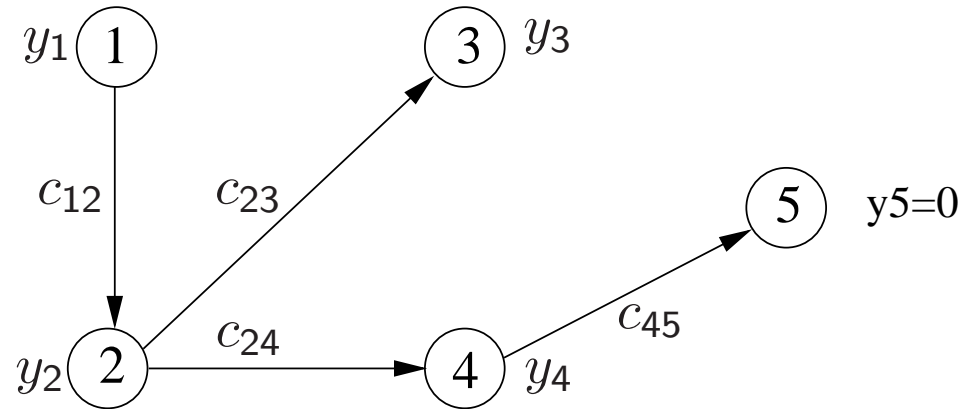
Till nod  $1, \dots, m - 1$  svarar simplexmultiplikator  $y_k$ ,  $k = 1, \dots, m - 1$ .

Om vi sätter vi  $y_m = 0$  får vi att

$$y_i - y_j = c_{ij}, \text{ för all } (i, j) \in \mathcal{B}_\beta \text{ (alla basbågar)}$$

Därmed ser vi att simplexmultiplikatorerna enkelt kan beräknas ur nätverket





Med  $\mathbf{c}^T = (c_{12}, c_{13}, c_{23}, c_{24}, c_{34}, c_{35}, c_{45}) = (2, 5, 2, 2, 1, 1, 2)$  får vi  
(i denna ordning p.g.a.  $y_5 = 0$ )

$$y_4 - y_5 = c_{45} \Rightarrow y_4 = c_{45} = 2$$

$$y_2 - y_4 = c_{24} \Rightarrow y_2 = y_4 + c_{24} = 2 + 2 = 4$$

$$y_2 - y_3 = c_{23} \Rightarrow y_3 = y_2 - c_{23} = 4 - 2 = 2$$

$$y_1 - y_2 = c_{12} \Rightarrow y_1 = y_2 + c_{12} = 4 + 2 = 6$$

## Beräkning av de reducerade kostnaderna $\mathbf{r}_\nu = \mathbf{c}_\nu^\top - \mathbf{y}^\top \mathbf{A}_\nu$

Formeln för de reducerade kostnaderna  $\mathbf{r}_\nu = \mathbf{c}_\nu^\top - \mathbf{y}^\top \mathbf{A}_\nu$  resulterar i ekvationerna ( $y_m = 0$ )

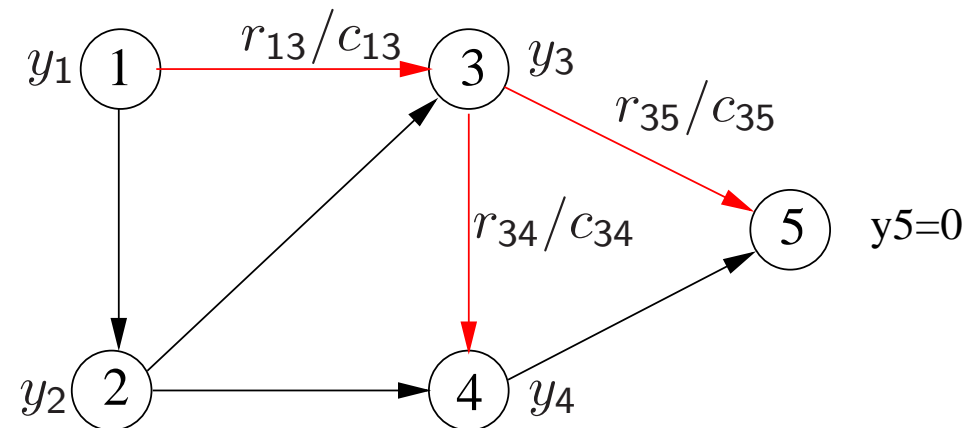
$$r_{ij} = c_{ij} - y_i + y_j \text{ för alla } (i, j) \in \mathcal{B}_\nu \text{ (dvs för alla icke-basbågar)}$$

I vårt exempel har vi

$$\mathcal{B}_\nu = \{(1, 3), (3, 4), (4, 5)\}$$

$$\mathbf{A}_\nu = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Vi kan göra beräkningarna med hjälp av nätverket



$$r_{13} = c_{13} - y_1 + y_3 = 5 - 6 + 2 = 1$$

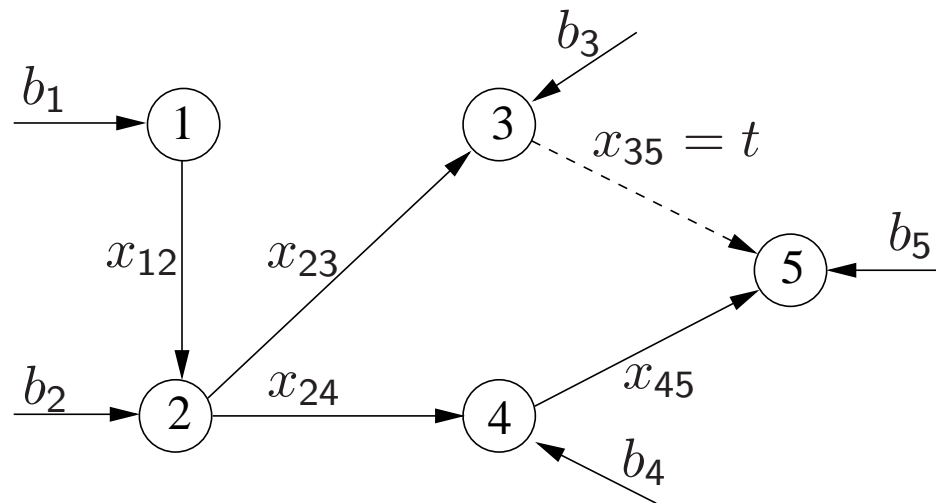
$$r_{34} = c_{34} - y_3 + y_4 = 1 - 2 + 2 = 1$$

$$r_{35} = c_{35} - y_3 + y_5 = 1 - 2 + 0 = -1$$

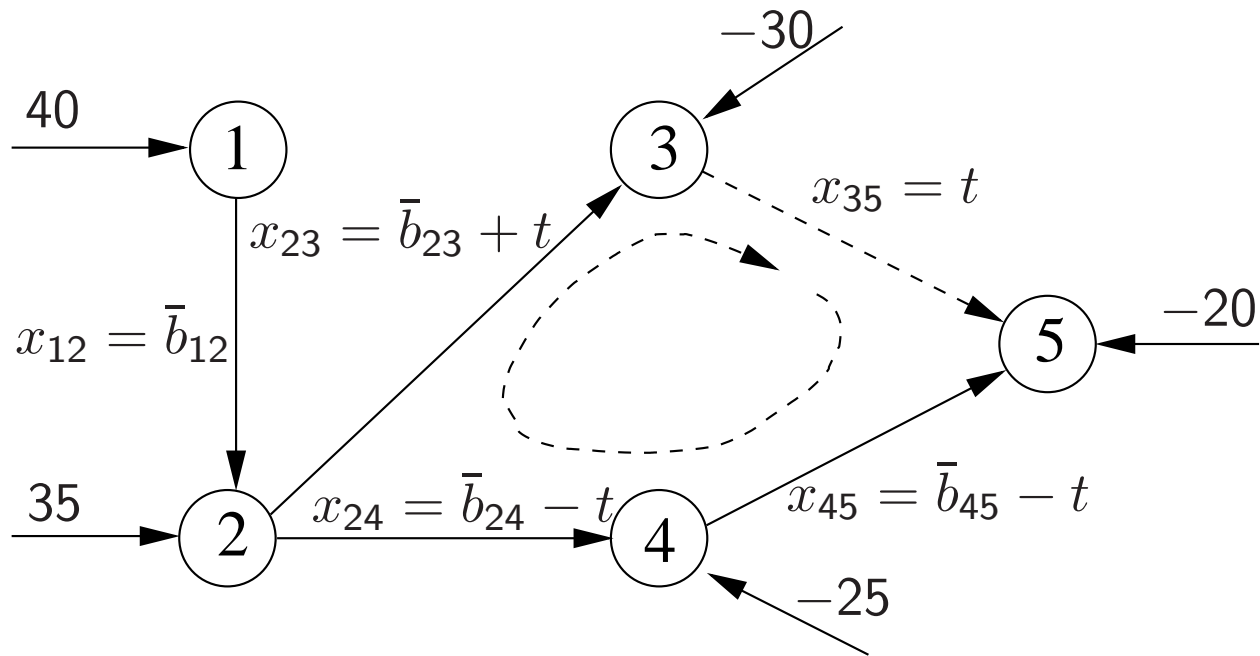
Vi noterar att  $r_{35} < 0$  och den aktuella tillåtna baslösningen är ej optimal.

## Kvottest

Eftersom  $r_{35} < 0$  sätter vi  $x_{35} = t$ , dvs bågen (3, 5) skall in i basen. Frågan är nu vilken båge som skall tas bort för att vi åter skall få ett uppspannande träd som svarar mot en ny basmatris.



Den vanliga testen i simplexmetoden  $t^{\max} = \min \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ik}} \mid \bar{a}_{ik} > 0 \right\} = \frac{\bar{b}_p}{\bar{a}_{pk}}$  förenklas genom att vi kan betrakta flödesbalans i slingan som bildats.



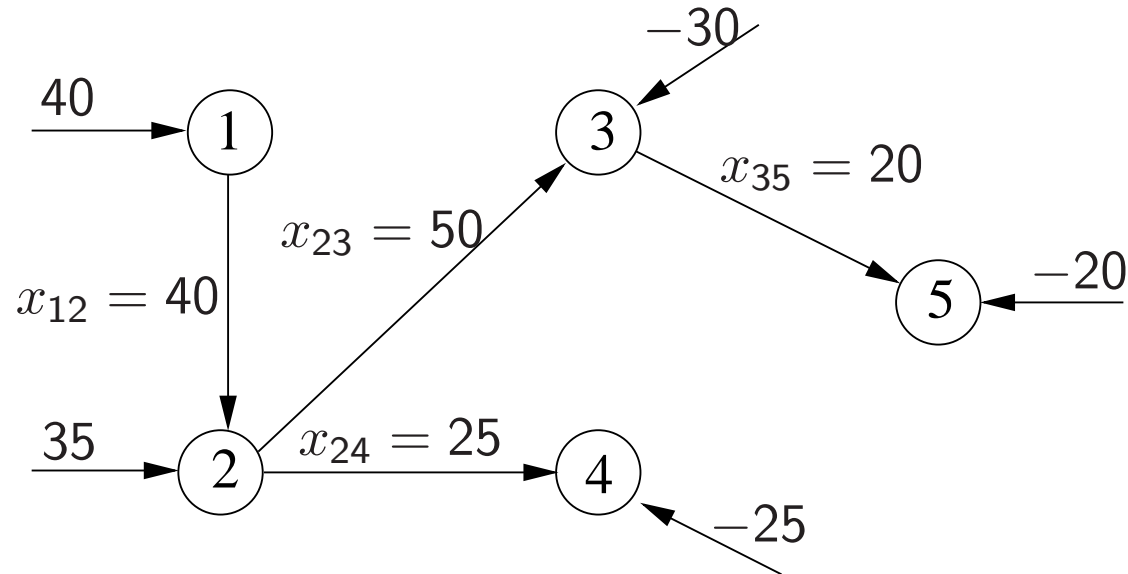
$$x_{23} = \bar{b}_{23} + t = 30 + t$$

$$x_{24} = \bar{b}_{24} - t = 45 - t$$

$$x_{45} = \bar{b}_{45} - t = 20 - t$$

Vi ser att  $t$  kan ökas till  $t^{\max} = 20$  varvid  $x_{45} = 0$ .  $x_{45}$  utgår ur basen.

## Pivoting (basbyte)



Vi har  $\mathcal{B}_\beta = \{(1, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 5)\}$  och

$$\mathbf{x}_\beta = \bar{\mathbf{b}}_\beta = \begin{bmatrix} 40 \\ 50 \\ 25 \\ 20 \end{bmatrix} \geq 0$$

vilket är en ny tillåten baslösning.



## Nästa iteration

Om vi upprepar ovanstående steg får vi

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_\nu = \begin{bmatrix} r_{13} \\ r_{34} \\ r_{45} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \geq 0$$

Eftersom samtliga reducerade kostnader är positiva så är den aktuella tillåtna baslösningen optimal.

## Sammanfattning av nätverkssimplexmetoden

För nätverksoptimering förenklas flera av stegen i simplexmetoden

- (i) En basindexvektor  $\mathcal{B}_\beta$  svarar mot bågarna i ett uppspännande träd.
- (ii) Baslösningen svarande mot  $\mathcal{B}_\beta$  kan beräknas ur flödesbalanser i ett uppspännande träd. Baslösningen är tillåten om flödet i samtliga basbågar är positivt.
- (iii) Simplexmultiplikatorerna beräknas som ( $y_m = 0$ )

$$y_i - y_j = c_{ij}, \text{ för all } (i, j) \in \mathcal{B}_\beta \text{ (alla basbågar)}$$

- (iv) De reducerade kostnaderna beräknas som ( $y_m = 0$ )

$$r_{ij} = c_{ij} - y_i + y_j \text{ för alla } (i, j) \in \mathcal{B}_\nu \text{ (dvs för alla icke-basbågar)}$$

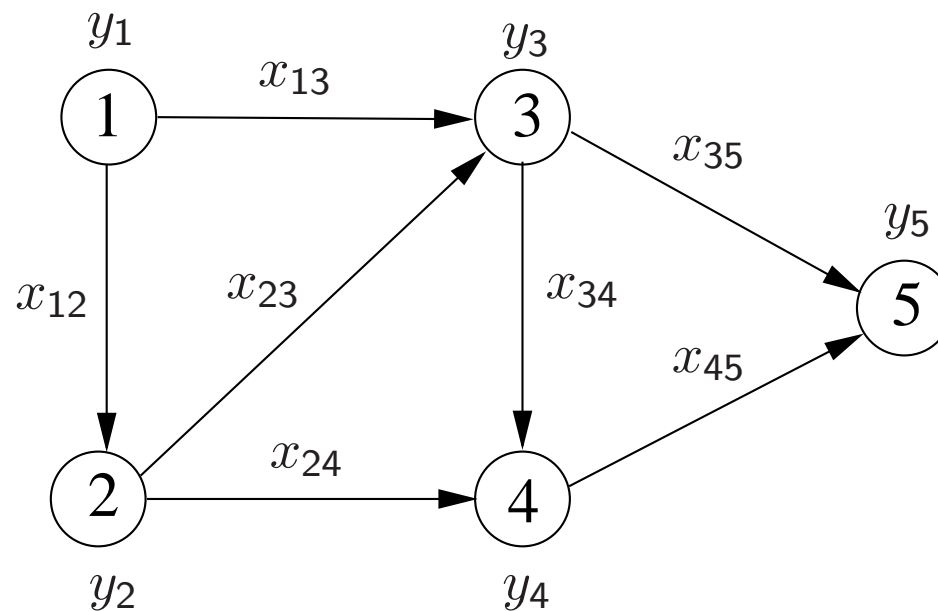
- (v) Om alla  $r_{ij} \geq 0$  så har vi funnit en optimal baslösning.

- (vi) Om någon reducerad kostnad  $r_{ij}$  är negativ (tag den mest negativa) så adderar vi bågen  $(i, j)$  till det uppspannande trädets som svarar mot basen  $\mathcal{B}_\beta$ . En slinga bildas och vi lägger på ett flöde  $x_{ij} = t \geq 0$ . Genom att studera flödesbalanser i slingan ser man hur mycket  $t$  kan ökas innan något av basflödena blir noll. Om  $t$  kan ökas obegränsat så är lösningen till optimeringsproblemet obegränsad.
- (vii) Uppdatera det uppspannande trädets genom att lägga till bågen  $(i, j)$  till  $\mathcal{B}_\beta$  samtidigt som bågen svarande mot det flöde som blev noll tas bort. Vi har nu fått en ny bas (dvs ett nytt uppspannande träd) och en ny tillåten baslösning.
- (viii) Gå tillbaka till (iii).

# De fyra fundamentala underrummen för anslutningsmatrisen

Detta avsnitt läses kursivt.

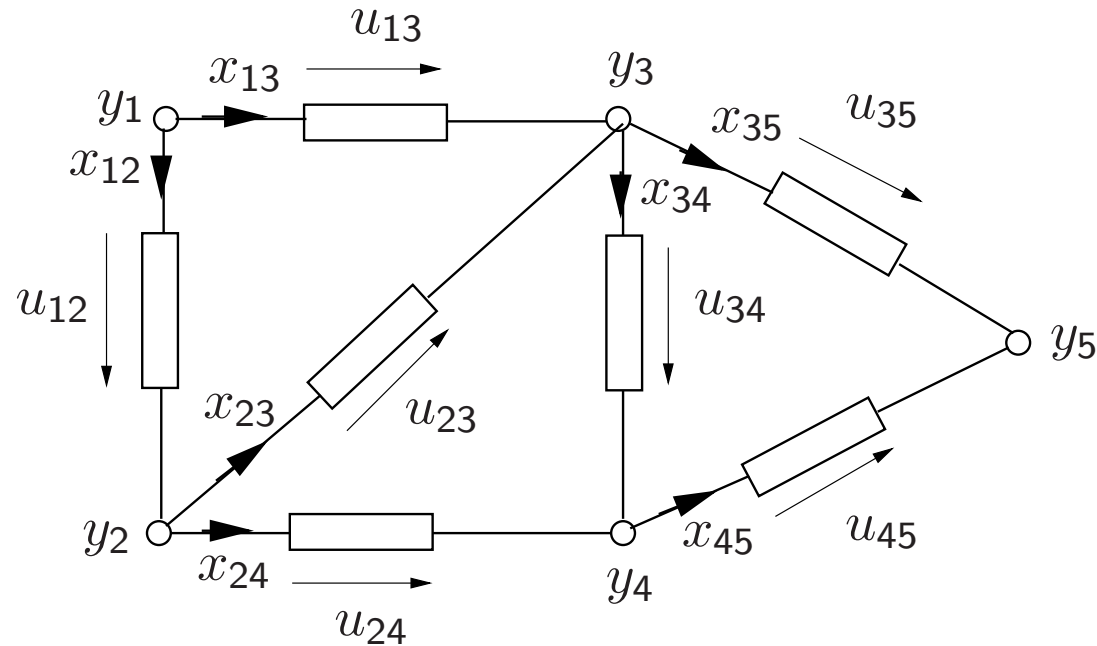
Vi diskuterar här de fyra fundamentala underrummen för anslutningsmatrisen  $\tilde{\mathbf{A}}$  och tolkar dem med hjälp av den associerade grafen  $\mathcal{G} = (\mathcal{N}, \mathcal{B})$ . Vi betraktar vårt exempel:



Till varje nod associerar vi en potential  $y_j$ ,  $j = 1, \dots, m$ .

Till varje båge associerar vi ett flöde (ström)  $x_{ij}$ .

Vi noterar att nätverket svarar mot nedanstående elektriska krets



- $y_j$ ,  $j = 1, \dots, 5$  betecknar potentialen i nod  $j$ .
- $x_{ij}$  betecknar strömmen genom båge  $(i, j)$ .
- $u_{ij}$  betecknar spänningen över resistorn i båge  $(i, j)$ .

## Vänstra nollrummet

Tolkning: Ekvationen  $\tilde{\mathbf{y}}^T \tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{u}$  svarar mot krav på spänningarna över bågarna

$$y_i - y_j = u_{ij} \quad \text{spänning} = \text{differens mellan potentialer}$$

Det finns ingen unik lösning: En godtycklig konstant till samtliga nodpotentialer utan att förändra spänningarna över bågarna.

$\mathbf{y}^T \mathbf{A} = \mathbf{u}$  svarar mot att potentialen  $y_5$  är fixerad till noll (jordad).

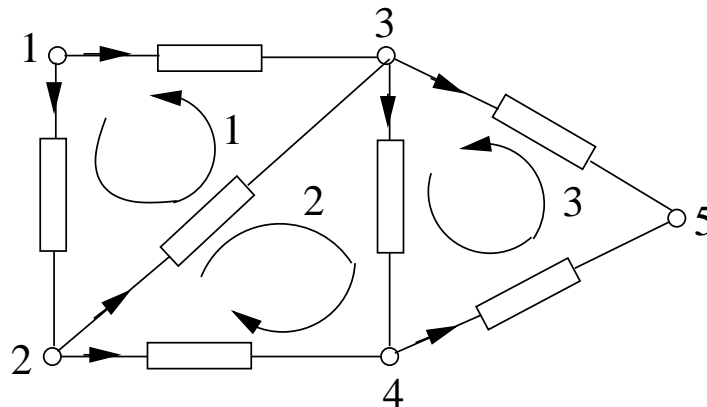
$$\mathcal{N}(\tilde{\mathbf{A}}^T) = \text{span} \left\{ \mathbf{e} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Om  $\tilde{\mathbf{y}} \in \mathcal{N}(\tilde{\mathbf{A}}^T)$ , då gäller  $u = 0$ . *d.v.s.*, om alla potentialer är lika så är alla spänningar noll.

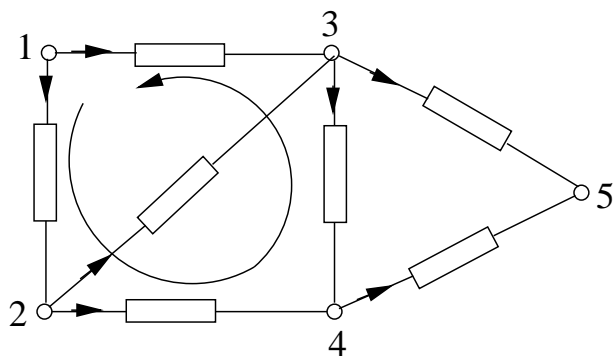
# Nollrummet

$$\mathcal{N}(\tilde{\mathbf{A}}) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbf{R}^7 : \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{x} = \mathbf{0} \right\} = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \mathcal{N}(\mathbf{A})$$

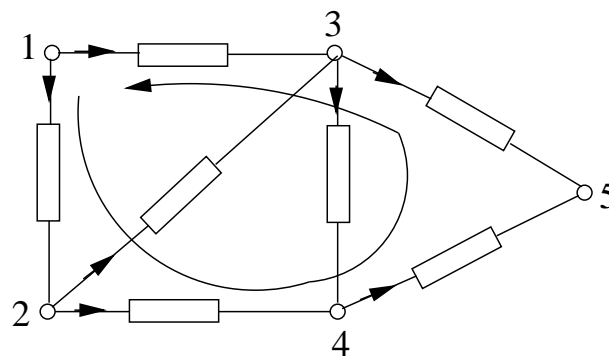
Tolkning: Nollrummet svarar mot tre slingor i grafen.



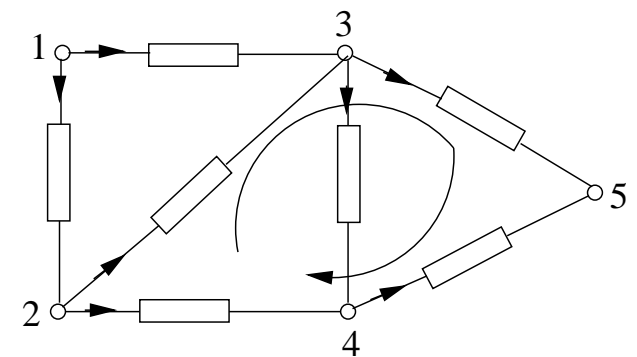
Övriga slingor i grafen erhålls som linjärkombinationer av de tre “basslingorna” i föregående figur.



Basslinga 1 – basslinga 2



Basslinga 1 – basslinga 2 + basslinga 3



Basslinga 2 – basslinga 3

Flödet in/ut ur kretsen påverkas inte av strömmen  $\tilde{x}$  i en cykel eftersom  $\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ .



## Radrummet

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(\tilde{\mathbf{A}}^\top) &= \left\{ \mathbf{u} = \tilde{\mathbf{A}}^\top \tilde{\mathbf{y}} \right\} \quad (= \left\{ \mathbf{u} = \mathbf{A}^\top \mathbf{y} \right\}) \\ &= \mathcal{N}(\tilde{\mathbf{A}})^\perp \quad (= \mathcal{N}(\mathbf{A})^\perp) \\ &= \left\{ \mathbf{u} \in \mathbf{R}^7 : u_{13} = u_{12} + u_{23}; u_{24} = u_{23} + u_{34}; u_{35} = u_{24} + u_{45} \right\}\end{aligned}$$

Tolkning: Summan av spänningarna över en cykel (slinga) är lika med noll. Detta kallas också Kirchoff's spänningslag.

Notera att det finns fler slingor, t.e.x. har vi villkoret

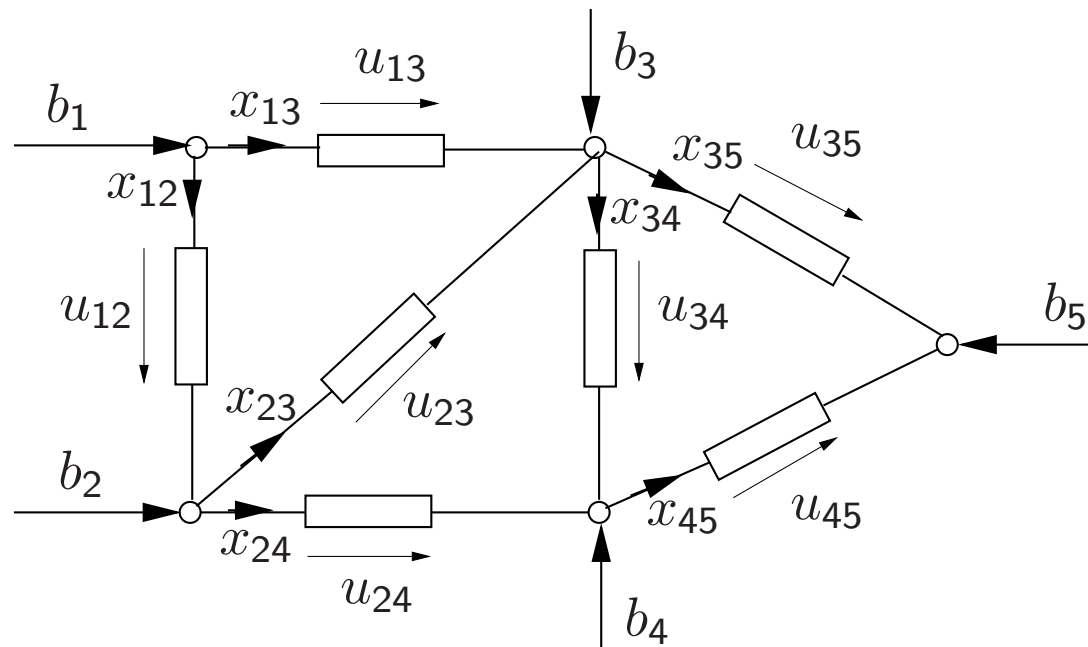
$u_{12} + u_{24} = u_{13} + u_{34}$ , men dessa villkor erhålls linjär kombinationer av de övriga (se föregående OH-bild).

# Bildrummet

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(\tilde{\mathbf{A}}) &= \mathcal{N}(\tilde{\mathbf{A}}^\top)^\perp = \{\mathbf{b} \in \mathbf{R}^m : \mathbf{e}^\top \mathbf{b} = 0\} \\ &= \{\mathbf{b} \in \mathbf{R}^m : \sum_{k=1}^m b_k = 0\}\end{aligned}$$

Om  $b_j$  tolkas som en extern ström som matas in i nod  $j$  så säger resultatet att summan av dessa strömmar måste vara noll.

# Kirchoff's lagar



- Kirchoff's strömlag: Summan av strömmarna in till en nod är noll. För kretsen i figuren kan detta skrivas  $\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ . Ett krav är naturligtvis att  $\sum_{j=1}^m b_j = 0$ .
- Kirchoff's spänningslag: Summan av spänningarna över en cykel (slinga) är lika med noll.

# Läsanvisningar

I optimeringskompendiet: Kapitel 7.2.

Gamla Materialet : Linjär optimering, gröna häftet, sidan 36-40.