Nollrumsmetoden

Ursprungligt problem

$$(QP) \quad \begin{array}{l} \min \ f(x) \\ \text{då } Ax = b \end{array}$$

Variabler $x \in \mathbb{R}^n$

$\Longleftrightarrow$

Ekvivalent problem

$$(QP') \quad \begin{array}{l} \min \ f(\bar{x} + Zv) \\ v \in \mathbb{R}^{\dim \mathrm{Ker}(A)} \end{array}$$

Variabler $v \in \mathbb{R}^{\dim(\mathrm{Ker}(A))}$

Bivillkor automatiskt uppfyllda!

Kan lösas som obegränsat problem!

Motivering:

- Antag $\bar{x}$ är tillåten till (QP), dvs. $A\bar{x} = b$.
- Låt Z vara en matris med basvektorer till $\ker(A)$ i kolonnerna.
- Då kan varje tillåten lösning till (QP) skrivas som

$$x = \bar{x} + Zv$$

- Sätt in i (QP)! $f(x) = \frac{1}{2}x^T H x + c^T x \Rightarrow$

$$f(\bar{x} + Zv) = \frac{1}{2} v^T \underbrace{Z^T H Z}_{\bar{H}} v + \underbrace{[Z^T(H\bar{x} + c)]^T}_{\bar{c}^T} v + \underbrace{f(\bar{x})}_{\substack{\bar{g} \\ \text{konstant}}}$$

Ekvivalenta problemet kan skrivas som

$$(QP') \quad \min \ \frac{1}{2} v^T \bar{H} v + \bar{c}^T v + \bar{g}$$

dvs. kvadratiskt problem utan bivillkor.

Lösning ges av

$$\bar{H} v = -\bar{c}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$Z^T H Z v = -Z^T (H \bar{x} + c)$$

Om $\bar{H} = Z^T H Z \succ 0 \Rightarrow$ unik lösning

Om $\bar{H} = Z^T H Z \succeq 0 \Rightarrow$ alla v som löser $\bar{H} v = -c$ är optima, men lösning kan saknas.

Om $\bar{H} = Z^T H Z \not\succeq 0 \Rightarrow$ $(\overline{QP})$, (QP) nedåt obegränsade.