Fundamentala Underrum

Matris $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

Vi kan skriva

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = [\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_n] = \begin{bmatrix} \bar{a}_1^T \\ \\ \bar{a}_m^T \end{bmatrix},$$

där $\hat{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$ och $\bar{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{bmatrix}$ (Kolonn vs. Rad)

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{a}_1^T \\ \vdots \\ \hat{a}_n^T \end{bmatrix} = [\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m]$$

Bildrummet (Kolonnrummet) $R(A)$

$R(A) = \{Ax : x \in \mathbb{R}^n\}$

$Ax = \hat{a}_1 x_1 + \dots + \hat{a}_n x_n$, dvs mängden av alla linjärkombinationer av A:s kolonner.

Notera: $Ax \in \mathbb{R}^m$, $R(A) \subset \mathbb{R}^m$

Nollrummet $N(A)$

$$N(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\}$$

Tolkning: Mängden av alla $x \in \mathbb{R}^n$, som är ortogonala mot raderna i A:

$$Ax = \begin{bmatrix} \bar{a}_1^T x \\ \vdots \\ \bar{a}_m^T x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad N(A) \subset \mathbb{R}^n$$

Radrummet $R(A^T)$

$$R(A^T) = \{A^T u : u \in \mathbb{R}^m\}$$

$A^T u = \begin{bmatrix} \bar{a}_1 \end{bmatrix} u_1 + \ldots + \begin{bmatrix} \bar{a}_m \end{bmatrix} u_m$, dvs mängden av alla linjärkombinationer av A:s rader,

Notera: $A^T u \in \mathbb{R}^n$, $R(A^T) \subset \mathbb{R}^n$

Vänstra Nollrummet

$$N(A^T) = \{u \in \mathbb{R}^m : A^T u = 0\}$$

Tolkning: Mängden av alla $u \in \mathbb{R}^m$ som är ortogonala mot kolonnerna i A.

$$A^T u = \begin{bmatrix} \hat{a}_1^T u \\ \vdots \\ \hat{a}_n^T u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Baser till de fundamentala underrummen

Bas till underrum: Linjärt oberoende vektorer som spänner upp rummet.

Sats: Om $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ kan faktoriseras som $A = BC$, där $B \in \mathbb{R}^{m \times r}$, $C \in \mathbb{R}^{r \times n}$

(B har r linj. oberoende kolonner,
C har r linj. oberoende rader)

så har både A och A^T rangen r.

Vidare gäller att

$N(A) = N(C)$

$N(A^T) = N(B^T)$

$R(A) = R(B)$

$R(A^T) = R(C^T)$

Gauss-Jordan faktorisering:

En metod för att hitta B och C.

* I denna metod: B kallas A_B
  C kallas U

* Tre steg
  - Hitta trappstegsmatrisen T.
  - Bestäm U
  - Bestäm A_B

Relationer mellan underrummen

- $R(A)$: Mängden av alla linjärkombinationer av kolonnerna i A: $\subset \mathbb{R}^m$

- $N(A^T)$: Mängden av alla vektorer i $\mathbb{R}^m$ som är ortogonala mot kolonnerna i A. $\subset \mathbb{R}^m$

Det gäller att

- $R(A) \perp N(A^T)$
- $\dim(R(A)) + \dim(N(A^T)) = m$

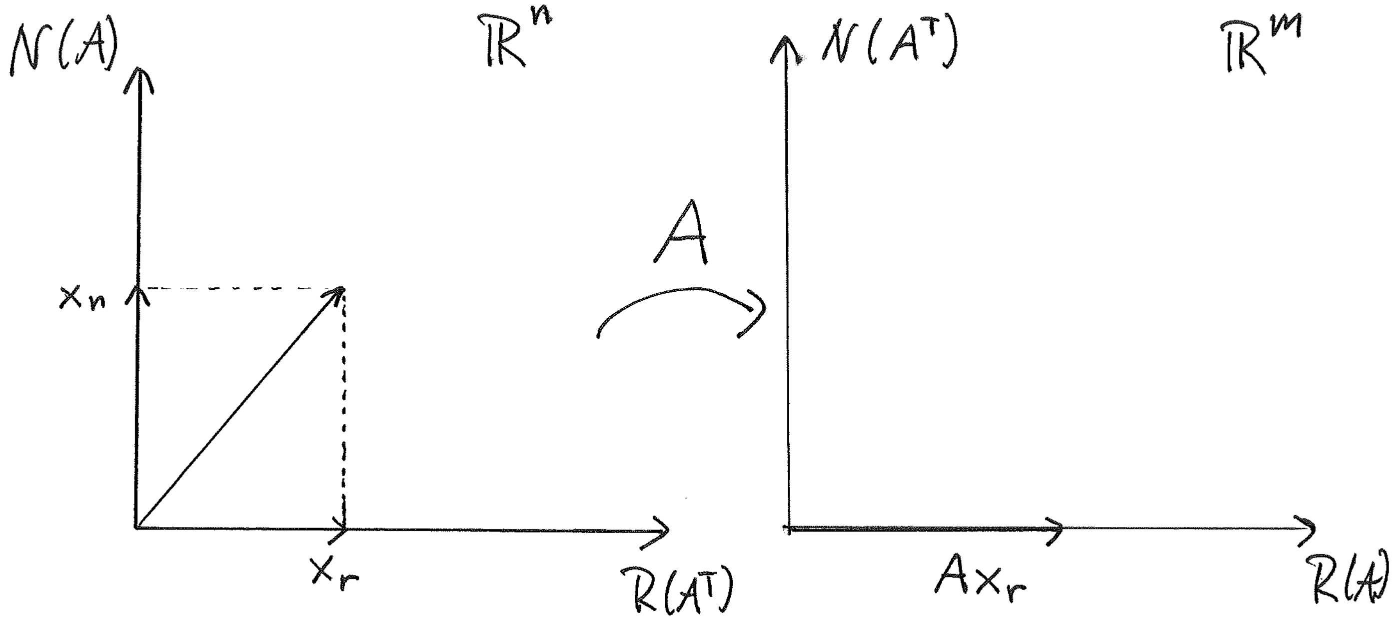
- $R(A^T)$: Mängden av alla linjärkombinationer av raderna i A: $\subset \mathbb{R}^n$

- $N(A)$: Mängden av alla vektorer i $\mathbb{R}^n$ som är ortogonala mot raderna i A: $\subset \mathbb{R}^n$

Det gäller att

- $R(A^T) \perp N(A)$
- $\dim(R(A^T)) + \dim(N(A)) = n$

Illustration



Ex