Induktionsbevis

Ex: 1, $1+3=4$, $1+3+5=9$, $1+3+5+7=16$, $1+3+5+7+9=25$

Förmodan: $1+3+\ldots+(2n-1)=n^2$

Problem: kan ej visas genom prövning

Idé: Påståendet är sant för $n=1$: $1=1^2$

$$1+3+\ldots+(2n-1)+(2n+1)=n^2+(2n+1)=(n+1)^2$$

Induktionsprincipen: Låt $P(n)$ $n=1,\ldots$ vara en svit av påståenden som antingen är sanna eller falska. Om

(1) $P(1)$ är sant

(2) om $P(n)$ är sant så är $P(n+1)$ sant

så är $P(n)$ sant för alla $n=1,\ldots$

Ex: Visa att $1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2=\dfrac{n(4n^2-1)}{3}$

(induktionsbas) $n=1$: $VL=1^2=1$ $\quad HL=\dfrac{1\cdot(4\cdot1^2-1)}{3}=1$

(ind hyp) Antag sant för $n=k$ vi vill då visa att det även är sant för $n=k+1$

(ind steg)

$$VL=1^2+3^2+5^2+\ldots+(2k-1)^2+(2(k+1)-1)^2=1^2+\ldots+(2k-1)^2+(2k+1)^2=$$

$$=\frac{k(4k^2-1)}{3}+(2k+1)^2=\frac{k(4k^2-1)}{3}+4k^2+4k+1$$

$$HL=\frac{(k+1)(4(k+1)^2-1)}{3}=\frac{(k+1)}{3}(4k^2+8k+3)=\frac{k(4k^2-1)}{3}+\frac{4k^2}{3}+\frac{8k^2}{3}+\frac{8k}{3}+\frac{4k}{3}+1=$$

$$=\frac{k(4k^2-1)}{3}+4k^2+4k+1$$

(Variant) **Induktionsprincipen:** (1) kan ersättas av (1') $P(N)$ är sant.

$[n=n-N+1]$ Slutsatsen blir då $P(n)$ sant för alla $n\geq N$.

Ex: Visa att $3^n>n^3$ för $n\geq4$.

(ind bas): $3^4=81>64=4^3$

(ind hyp): Antag påståendet gäller för $n=k$: $3^k>k^3$.

(ind påst): Då gäller även $3^{k+1}>(k+1)^3$

Bevis: $3^{k+1}=3\cdot3^k>3\cdot k^3=k^3+2k^3>k^3+3k^2+9k>(k+1)^3$

Ex: Visa att $p+(p+1)+\ldots+(p+n) = \frac{(n+1)(2p+n)}{2} \quad \forall p \in \mathbb{Z}, \; n=0,1,\ldots$

(Ind bas) $n=0$: $p = \frac{(0+1)(2p+0)}{2}$

(Ind hyp) $n=k$: Ant $p+(p+1)+\ldots+(p+k) = \frac{(k+1)(2p+k)}{2}$

(Ind påst) $n=k+1$: då gäller även $p+\ldots+(p+k+1) = \frac{(k+2)(2p+k+1)}{2}$

bevis: $p+\ldots+(p+k)+(p+k+1) = \frac{(k+1)(2p+k)}{2} + (p+k+1) = \frac{(k+1)(2p+k)}{2} + \frac{2p+k+k+2}{2}$

$= \frac{(k+2)(2p+k)}{2} + \frac{k+2}{2} = \frac{(k+2)(2p+k+1)}{2}$

Enl ind princ gäller påståendet för alla $n \geq 0$.

Ex: Bevisa formeln $\cos\frac{x}{2} + \ldots + \cos\left(\frac{2n-1}{2}x\right) = \frac{\sin nx}{2\sin\frac{x}{2}}, \quad n \geq 1$

(Ind bas): $n=1$: $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} \iff \cos\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{2\sin\frac{x}{2}}$

(Ind hyp): $n=k$: Ant $\cos\frac{x}{2} + \ldots + \cos\frac{(2k-1)x}{2} = \frac{\sin kx}{2\sin\frac{x}{2}}$

(Ind påst): $n=k+1$: då gäller även $\cos\frac{x}{2} + \ldots + \cos\frac{(2k+1)x}{2} = \frac{\sin(k+1)x}{2\sin\frac{x}{2}}$

(bevis av Ind påst) $VL = \cos\frac{x}{2} + \ldots + \cos\left(\frac{(2k-1)x}{2}\right) + \cos\left(\frac{(2k+1)x}{2}\right) = \frac{\sin kx}{2\sin\frac{x}{2}} + \cos\frac{(2k+1)x}{2}$

$= \frac{\sin kx}{2\sin\frac{x}{2}} + \cos\left(k+\frac{1}{2}\right)x = \frac{\sin kx}{2\sin\frac{x}{2}} + \cos kx\cos\frac{x}{2} - \sin kx \sin\frac{x}{2}$

$= \frac{\sin kx}{2\sin\frac{x}{2}}\left(1 - 2\sin^2\frac{x}{2}\right) + \cos kx\cos\frac{x}{2} = \frac{\sin kx}{2\sin\frac{x}{2}}\left(\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}\right) + \frac{\cos kx \sin x}{2\sin\frac{x}{2}} =$

$= \frac{\sin kx}{2\sin\frac{x}{2}}\cos x + \frac{\cos kx \sin x}{2\sin\frac{x}{2}} = \frac{\sin(k+1)x}{2\sin\frac{x}{2}}.$

Ex: Visa att heltalen $5\cdot7^n - 3^n$, $n=1,\ldots$ alla är delbara med 4.

(Ind bas): $n=1$: $5\cdot7-3 = 35-3 = 32$

(Ind hyp): $n=k$: Antag $5\cdot7^k - 3^k$ är delbart med 4

(Ind påst): $n=k+1$: då gäller även att $5\cdot7^{k+1} - 3^{k+1}$ är delbart med 4.

(bevis ind påst): $5\cdot7^{k+1} - 3^{k+1} = 7\cdot5\cdot7^k - 3\cdot3^k = 7\cdot(5\cdot7^k - 3^k) + 7\cdot3^k - 3\cdot3^k =$

$= 7(5\cdot7^k - 3^k) + (7-3)\cdot3^k = 7(5\cdot7^k - 3^k) + 4\cdot3^k$

Enl induktionsprincipen gäller så påståendet för alla n

(Stark induktion): Iblånd är det användbart att i induktionssteget anta påståendet inte bara för $n=k$ utan för alla $n \leq k$.

Ex: Låt följden a_n definieras som

$$a_1=3 \,,\quad a_2=5 \,,\quad a_n=3a_{n-1}-2a_{n-2} \quad (n\geq 3).$$

Visa att $a_n = 2^n+1$ för alla $n \geq 1$.

(Ind bas) $n=1,2$: $a_1 = 3 = 2^1+1$, $a_2 = 5 = 2^2+1$

(Ind hyp) $n \leq k$: Antag att $a_n = 2^n+1$ för alla $n \leq k$

(Ind påst) $n=k+1$: då gäller även $a_{k+1} = 2^{k+1}+1$.

(bevisar ind påst) $a_{k+1} = 3a_k - 2a_{k-1} = 3\cdot(2^k+1) - 2(2^{k-1}+1) =$

$$= 3\cdot 2^k + 3 - 2^k - 2 = 2\cdot 2^k + 1 = 2^{k+1}+1.$$

Enl induktionsprincipen gäller påståendet för alla $n \geq 1$.

Anm: observera att det hade räckt med ind ant för k och $k-1$.

Ex: Visa att n^3+2n är delbart med 3 för alla heltal n.

I: $n \geq 0$. (Ind bas): $n=0$ $\quad 0^3+2\cdot 0 = 0$ delbart med 3

(Ind hyp): $n=k$: Antag $3 \mid k^3+2k$

(Ind påst): $n=k+1$: då delar 3 även $(k+1)^3+2(k+1)$

(bevis ind påst): $(k+1)^3+2(k+1) = k^3+3k^2+3k+1+2k+2 = k^3+2k+3(k^2+k+1)$

$\therefore$ enl. ind principen gäller så påståendet för $n \geq 0$

II: $n \leq 0$ (Ind bas): $n=0$ OK

(Ind hyp): $n=-k$: Antag $3 \mid (-k)^3+2(-k)$

(Ind påst): $n=-k-1$: då delar 3 även $(-k-1)^3+2(-k-1)$

bevis: $(-k-1)^3+2(-k-1) = -(k+1)^3 - 2(k+1)$ ... som ovan

Ex: $3^n > n^3 \quad n \geq 4$ (OBS! ind bas)

$3^{k+1} > 3k^3 = k^3+2k^3 \geq k^3+3k^2+9k > (k+1)^3$ också för $k=3$!

men $3^3 = 3^3$