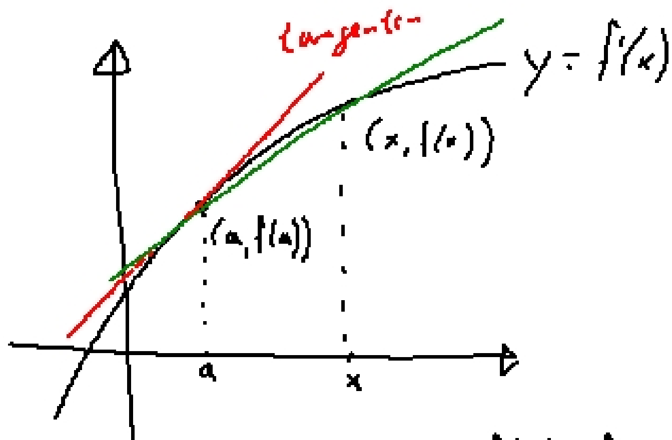
# Derivator




Kordans lutning: $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

tangentens lutning: $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$

$f'(a)$ är $f$:s derivata i punkten $a$

**Def:** $f$ deriverbar i $a$ om

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{existerar}$$

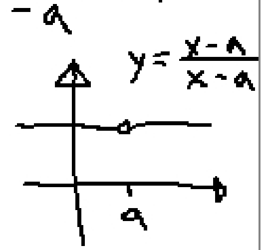
och är egentligt $(< \infty)$.

**Ex:** $f(x) = x$ är deriverbar

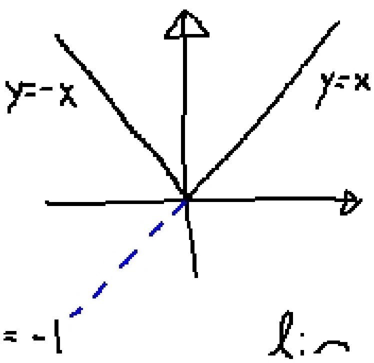
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{x - a}{x - a} = 1$$

**Ex:** $f(x) = C$ en konstant

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{C - C}{x - a} = 0$$



Ex: $f(x) = |x|$ är inte deriverbar i $x = 0$.




$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x - 0}{x - 0} = 1$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

$|-1| = 1 = -(-1)$

$|x| = -x$

$x < 0 \quad x = -y$

$y > 0$

$|x| = |-y| = y = -x$

De ensidiga gränsvärdena är olika så derivatan existerar ej.

Ex: $f(x) = \sqrt[3]{x}$ är inte deriverbar i $x = 0$.

$$\frac{dx^{\frac{1}{3}}}{dx} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$$

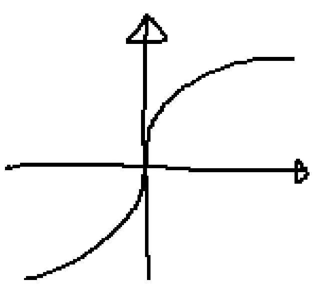
ej definierad för $x=0$ !

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{0}}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}-0}{x-0} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^{\frac{1}{3}}}{x} = \lim_{x\to 0} x^{\frac{1}{3}-1} =$$

$$= \lim_{x\to 0} x^{-\frac{2}{3}} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \infty$$

oegentligt gränsvärde



tangenten i $x=0$ skulle bli lodrät

tangentlinjen $x=0$

Kontinuerliga funktioner behöver alltså inte vara deriverbara.

Sats: Om $f$ deriverbar i $x=a$ så är $f$ också kontinuerlig i $x=a$.

Bevis: Att $f$ är deriverbar i $a$ betyder att gränsvärdet

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

existerar och är egentligt.

Då $\lim_{x\to a} x-a$ går mot $0$ måste även $f(x)-f(a)\to 0$, när $x\to a$.

Vi har således

$$\lim_{x \to a} f(x) - f(a) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

dvs $f$ är kontinuerlig i $a$.

$$\lim_{x \to a} \left( f(x) + 4 \right) = \left( \lim_{x \to a} f(x) \right) + 4$$

# Deriveringsregler

1. $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$

2. $(cf)'(x) = c\,f'(x)$    $c$ konstant

3. $(f \cdot g)'(x) = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$

4. $g(x) \neq 0$    $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x)\,f'(x) - g'(x)\,f(x)}{g(x)^2}$

5. $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))\,g'(x)$

6. $(g^{-1})'(x) = \frac{1}{g'(g^{-1}(x))}$

Ex Vad blir $\frac{d}{dx}(x^3+2x)$ ?

$$\frac{d(x^3+2x)}{dx} = (1) = \frac{d(x^3)}{dx} + \frac{d(2x)}{dx} =$$

$$= \frac{d(x^3)}{dx} + 2\frac{dx}{dx} = \frac{d(x^3)}{dx} + 2\cdot 1 =$$

$$= \frac{d(x\cdot x^2)}{dx} + 2 = (7) = \left(\frac{dx}{dx}x^2 + x\frac{dx^2}{dx}\right) + 2 =$$

$$= x^2 + x\frac{d(x\cdot x)}{dx} + 2 = (7) = x^2 + x\left(\frac{dx}{dx}x + x\frac{dx}{dx}\right) + 2 =$$

$$= x^2 + x(1\cdot x + x\cdot 1) + 2 = 3x^2 + 2$$

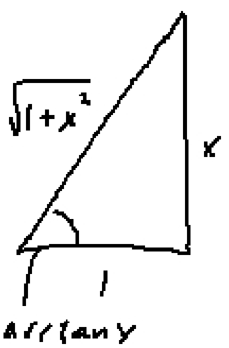
Ex: $\dfrac{d\left(\frac{1}{x}\right)}{dx} = (4) = \dfrac{x \cdot 0 - 1 \cdot 1}{x^2} = -\dfrac{1}{x^2}$

Övn: Visa med hjälp av induktion att $\dfrac{d\,x^n}{dx} = n\,x^{n-1}$ $\quad n \geq 1$

(använd produkt regeln)

229 e) Förenkla $2\arctan\frac{1}{2} + \arccos\left(-\frac{3}{5}\right)$

sid 67 i övnboken




$\cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$\sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

Vi tar först cosinus av uttrycket

$$\cos\left(2\arctan\frac{1}{2} + \arccos\left(-\frac{3}{5}\right)\right) =$$

$$= \cos\left(2\arctan\frac{1}{2}\right)\cos\left(\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)\right) - \sin\left(2\arctan\frac{1}{2}\right)\sin\left(\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)\right) =$$

$$= \left(\cos^2\left(\arctan\frac{1}{2}\right) - \sin^2\left(\arctan\frac{1}{2}\right)\right)\left(-\frac{3}{5}\right) - 2\sin\left(\arctan\frac{1}{2}\right)\cos\left(\arctan\frac{1}{2}\right)\sin\left(\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)\right) =$$

$$= \left(\left(\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}}\right)^2 - \left(\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}}\right)^2\right)\left(-\frac{3}{5}\right) - 2\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}}\sqrt{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2} =$$

$$= \left( \left( \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4}}} \right)^2 - \left( \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{5}{4}}} \right)^2 \right) \left( -\frac{3}{5} \right) - 2 \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{5}{4}}} \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4}}} \cdot \frac{4}{5} =$$

$$= \left( \frac{4}{5} - \frac{1}{5} \right) \left( -\frac{3}{5} \right) - 2 \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{4}{5} =$$

$$= -\frac{9}{25} - \frac{16}{25} = -1$$

Så $\cos \alpha = -1 \Rightarrow \alpha = \pi + 2\pi n$

men

$-\frac{\pi}{2} < \arctan \frac{1}{2} < \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \arccos\left(-\frac{3}{5}\right) \leq \pi$

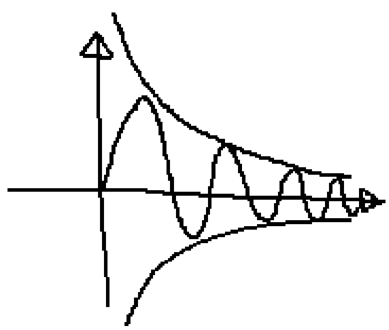
Så $-\pi < 2\arctan \frac{1}{2} + \arccos\left(-\frac{3}{5}\right) < 2\pi$

Det ger $2\arctan \frac{1}{2} + \arccos\left(-\frac{3}{5}\right) = \pi$.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x} \quad ?$$

Vi kan anta att $x > 0$. Vi har att

$$\underbrace{-\frac{1}{x}}_{\to 0} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}$$



$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$$

enligt instängningssatsen

110. Visa att

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

$1$

$1-1 = 0$

$1-2+1 = 0$

$1-3+3-1 = 0$

$1-4+6-4+1 = 0$ och

$1-5+10-10+5-1 = 0$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0.$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} (-1)^k = (1+(-1))^n = 0^n = 0$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} 1^k = (1+1)^n = 2^n$$