Högre derivator

$$D\sin x = \cos x$$

cos x också deriverbar
så vi kan derivera en gång
till

$$D^2\sin x = D(D\sin x) = D\cos x = -\sin x$$

andra derivatan av sin x
Andra derivatan av sin x är -sin x
som också går att derivera.

tredje derivata — $D^3\sin x = D(D^2\sin x) = D(-\sin x) = -\cos x$

f' är en funktion så vi kan ta $(f')' = f''$ eller $\frac{d^2 f}{dy^2}$ eller $D^2 f$. På samma sätt har vi n-te derivator som vi skriver $f^{(n)}$, $\frac{d^n f}{dx^n}$ eller $D^n f$.

Ex: $D^n e^x = e^x$

$D^n a^x = (\ln a)^n a^x$

Ex: $D^n \sin x = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$

$$D \sin x = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$D^2 \sin x = D \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \cdot 1 =$$

$$= \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right)$$

$$D\left(D^{n-1} \sin x\right) = D^n \sin x = D \sin\left(x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= \cos\left(x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

Övn: Visa att $D^n x^n = n!$

$$(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x) = (f' \pm g')(x)$$

$$(f \pm g)''(x) = (f' \pm g')'(x)$$

$$= f''(x) \pm g''(x)$$

$$(f \pm g)^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) \pm g^{(n)}(x)$$

$$(cf)'(x) = c\, f'(x)$$

$$D^2 cf = DcDf = = cD^2 f$$

$$(cf)''(x) = ((cf)')'(x) = (c\, f')'(x) = = c\, f''(x)$$

$$(cf)^{(n)}(x) = c\, f^{(n)}(x)$$

$$D(cf) = c\,Df + f\,Dc =$$
$$= c\,Df + 0 = c\,Df$$

<u>Leibniz' regel</u>: $\qquad f^{(0)}(x) = f(x)$

$$(f \cdot g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x)\, g^{(k)}(x)$$

Ind bas: $(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
$$= \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} f^{(1-k)}(x)\, g^{(k)}(x)$$

I-S anl: $(f \cdot g)^{(p)}(x) = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} f^{(p-k)}(x)\, g^{(k)}(x)$

Ind påst: $(f \cdot g)^{(p+1)}(x) = \sum_{k=0}^{p+1} \binom{p+1}{k} f^{(p+1-k)}(x)\, g^{(k)}(x)$

Bevis av ind påst

$$(f\cdot g)^{(p+1)}(x) = D(f\cdot g)^{(p)}(x) = \text{(enl ind ant)}$$

$$= D\left(\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k} f^{(p-k)}(x)\, g^{(k)}(x)\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k} D\left(f^{(p-k)}(x)\, g^{(k)}(x)\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}\left(f^{(p+1-k)}(x)\, g^{(k)}(x) + f^{(p-k)}(x)\, g^{(k+1)}(x)\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k} f^{(p+1-k)}(x)\, g^{(k)}(x) + \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k} f^{(p-k)}(x)\, g^{(k+1)}(x) =$$

$k \to k-1$

$$= \sum_{k=0}^{p+1}\left(\binom{p}{k}+\binom{p}{k-1}\right) f^{(p+1-k)}(x)\, g^{(k)}(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{p+1} \binom{p+1}{k} f^{(p+1-k)}(x)\, g^{(k)}(x).$$

Enligt induktionsprincipen gäller Leibniz formel för alla $n \geq 1$.

Ex: $$D^2(x^2 e^x) = \sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k} D^{(2-k)} x^2\, D^k e^x$$

$$= \binom{2}{0}(D^2 x^2) \cdot e^x + \binom{2}{1} D x^2 \cdot D e^x + \binom{2}{1} x^2 D^2 e^x =$$

$$= 2e^x + 2 \cdot 2x\, e^x + x^2 e^x =$$

$$= (2 + 4x + x^2)\, e^x$$

$$D \sinh x = D\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = \cosh x$$

$$D\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(D(e^x) - D e^{-x}\right) =$$

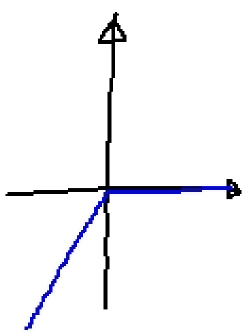
$$= \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\cdot(-1)\right) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$$

$$D \cosh x = D\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) = \frac{De^x + De^{-x}}{2} =$$

$$= \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$$

Övn: Derivera $\tanh x$ och $\coth x$.

$$x - |x|$$



$$\lim_{x\to 0^+} x-|x| = \lim_{x\to 0^+} x - x = \lim_{x\to 0^+} 0 = 0$$

$$\lim_{x\to 0^-} x-|x| = \lim_{x\to 0^-} x + x = \lim_{x\to 0^-} 2x = 0$$

Vi har också $0 - |0| = 0$

typ 407: Funktionen är kontinuerlig.

Högerderivatan i 0

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x-|x|-(0-|0|)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{0}{x} = 0$$

Vänster derivata $\lim_{x\to 0^-} \frac{x-|x|-0}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{2x}{x} = 2$

$\Rightarrow$ funktionen är ej deriverbar i $x=0$.