Ex 16: $\lim\limits_{x \to \infty} x^2 \left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{x} \right) = \text{"}\infty \cdot 0\text{"}$

$$\lim_{x \to \infty} x^2 \left(\frac{x - (1+x)}{x(1+x)} \right) =$$

$$= \lim_{x \to \infty} x^2 \left(\frac{-1}{x^2 + x} \right) = \lim_{x \to \infty} \cancel{x^2} \left(\frac{-1}{\cancel{x^2}\left(1 + \frac{1}{x}\right)} \right)$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{-1}{1 + \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}} = -1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{|x|} = \lim_{x \to 0} \cos x \cdot \lim_{x \to 0} \frac{1}{|x|} = 1 \cdot \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} =$$

$$= \infty$$

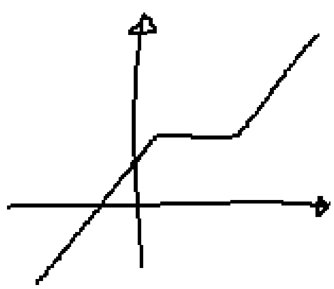
$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+2x} - x =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+2x} - x\right)\left(\sqrt{x^2+2x} + x\right)}{\sqrt{x^2+2x} + x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x^2} + 2x - \cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+2x} + x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1\right)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2}{\sqrt{1+\underbrace{\tfrac{2}{x}}_{\to 0}}+1} = \frac{2}{\sqrt{1}+1} = \frac{2}{2} = 1$$

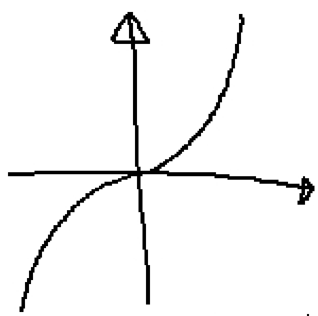
Monotonitetssatsen



$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x \le 1 \\ 2 & 1 \le x \le 3 \\ x-1 & x \geq 3 \end{cases}$$

växande funktion

$f(x_1) \geq f(x_2)$ om $x_1 > x_2$



$f(x) = x^3$

strängt växande

$f(x_1) > f(x_2)$

om $x_1 > x_2$

Motsvarande för avtagande.

Monotona funktioner: växande eller avtagande

Monotonitetssatsen:

Låt f vara deriverbar och definierad på något intervall.

1. a) f växande/avtagande i intervallet $\Longleftrightarrow$ $f'(x) \geq 0$ / $f'(x) \leq 0$ i intervallet.

   b) f strängt växande/avtagande i intervallet $\boxed{\Longleftarrow}$ $f'(x) > 0$ / $f'(x) < 0$ i intervallet.

2. f är konstant i intervallet $\Longleftrightarrow$ $f'(x) = 0$ i intervallet.

Bevis: (f växande $\Rightarrow f'(x) \geq 0$)

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_1) - f(x_2)}{\Delta x} \geq$$

$(x_1 = x + \Delta x\ ,\ x_2 = x \qquad x_1 - x_2 = \Delta x > 0)$

≥ 0.

Bevis av $f'(x) \geq 0 \Rightarrow f$ växande

kommer imorgon.

Bevis av 2.

f konstant $\Rightarrow f$ växande och avtagande

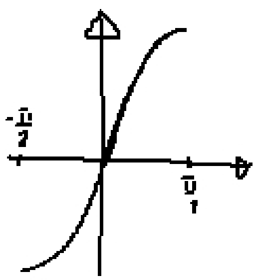
$\Rightarrow f'(x) \geq 0$ och $f'(x) \leq 0 \Rightarrow f'(x) = 0$.

Om $f'(x) = 0$ så är $f'(x) \geq 0$ och $f'(x) \leq 0$
vilket ger att funktionen både
är växande och avtagande, så
f måste vara konstant.

$$x_1 > x_2 : \quad f(x_1) \geq f(x_2) \quad \text{och}$$
$$f(x_1) \leq f(x_2)$$
$$\Rightarrow f(x_1) = f(x_2).$$

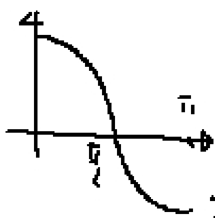
Ex: $\sin x$ är växande på intervallet $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

$D \sin x = \cos x \geq 0$ på intervallet. Dessutom har vi att $\cos x > 0$ på intervallet $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, så $\sin x$ strängt växande där.



Ex: $\cos x$ är avtagande på $[0, \pi]$.

$D \cos x = -\sin x \leq 0$ Vi har också att $-\sin x < 0$ på det öppna intervallet $]0, \pi[= (0, \pi)$ så $\cos x$ strängt avtagande där.

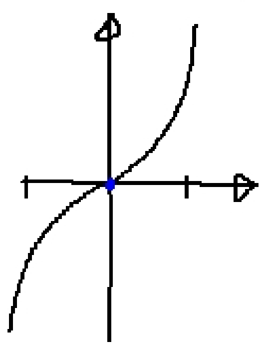


Övn: Gör motsvarande för tangens och cotangens

Ex: Låt $f(x) = x^3$ $f(x_1) - f(x_2) =$

$= x_1^3 - x_2^3 = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2)$

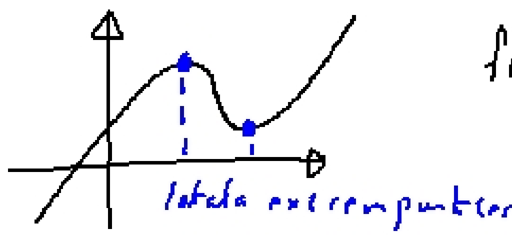
> 0 om $x_1 - x_2 > 0$, $x_1x_2 \geq 0$



Vi kan visa att $f(x)$ strängt växande. Men $f'(x) = 3x^2$

som inte är > 0 när $x = 0$!

Alltså: f strängt växande $\not\Rightarrow$ $f'(x) > 0$

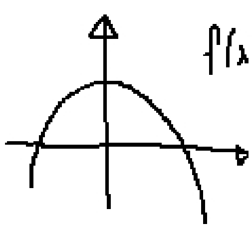


$f(x_0) \geq f(x)$ för x nära x_0

eller $f(x_0) \leq f(x)$ för x nära x_0

Sats (om extrempunkter)

f deriverbar definierad på ett intervall. Då gäller att om x_0 är en lokal extrempunkt så är $f'(x_0)=0$.



$f(x) = 2 - x^2$

$x=0$ är lokalt maximum

Bevis: Antag x_0 lokalt maximum

$\Rightarrow f(x_0) \geq f(x)$ för x nära x_0

$\Rightarrow f(x) - f(x_0) \leq 0$

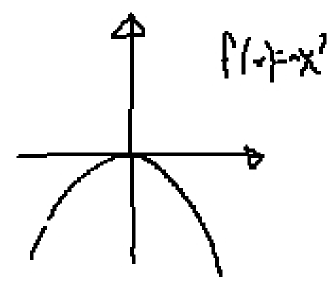
$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0 \quad \text{om } x > x_0$$

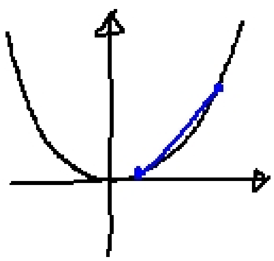
$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0 \quad \text{om } x < x_0$$

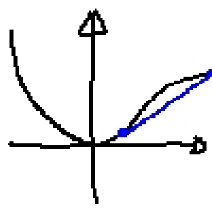
$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0$$

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$$

$$\Rightarrow f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = 0$$







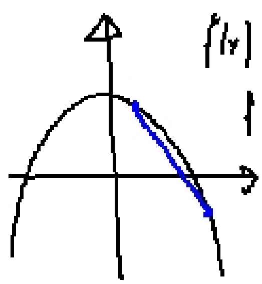
$f(x) = x^2$ konvex

Kurvan ligger under kordan (sträckan mellan två punkter på kurvan)

$\Rightarrow$ f' är växande

$\Rightarrow$ $f''(x) \geq 0$ i intervallet

Ex: $f(x) = x^2$ $f''(x) = 2 > 0$



$f(x) = 2 - x^2$ Konkav:

$f''(x) = -2 < 0$ kurvan ligger ovanför kordan

$\Rightarrow$ f' avtagande

$\Rightarrow$ $f''(x) \leq 0$ i intervallet