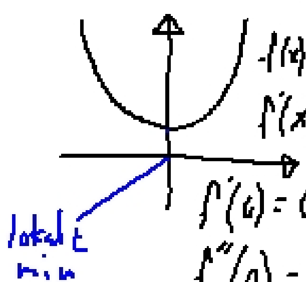
Sats: Låt f vara en funktion definierad på ett öppet intervall (a,b) och deriverbar. Då gäller det att



$f(x)=x^2+1$

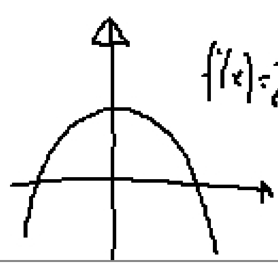
$f'(x)=2x$

$f'(0)=0$

$f''(0)=2>0$

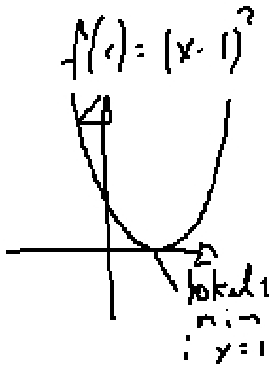
i) $f'(x_0)=0$ och $f''(x_0)>0$ då är x_0 är en lokal minimipunkt.

ii) $f'(x_0)=0$ och $f''(x_0)<0$ så är x_0 en lokal maximipunkt.



$f(x)=2-x^2$

$f'(x)=-2x$, $f'(0)=0$ och $f''(0)=-2<0$.



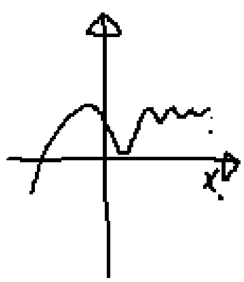
Bevis: Räcker att betrakta det första fallet, det andra följer analogt.

Antag så $f'(x_0)=0$ och $f''(x_0)>0$.

x nära x_0, $x>x_0$

$$\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0} = \frac{f'(x)}{x-x_0} \geqslant 0 \quad \text{för } f''(x_0)>0$$

$\Rightarrow f'(x)$ är växande nära x_0



$\Rightarrow f'(x) > 0$ för $x > x_0$ nära x_0

$f'(x) < 0$ för $x < x_0$ nära x_0

$\Rightarrow f$ växande för $x > x_0$ nära x_0

f avtagande för $x < x_0$ nära x_0

$\Rightarrow f(x) \geq f(x_0)$ för x nära x_0

$\Rightarrow x_0$ är en lokal minimipunkt

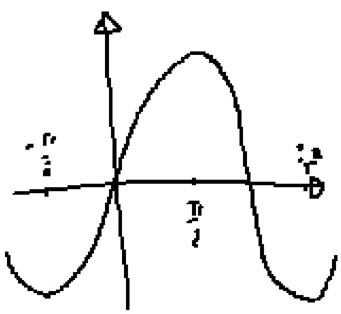
Ex: $f(x) = (x-1)^2$ $\quad f'(x) = 2(x-1)\cdot 1$

$f'(1) = 0$ $\quad f''(x) = 2 > 0$ så $x=1$ lokal minimipunkt

Ex: $f(x) = \sin x$, $f'(x) = \cos x$

Var är $\cos x = 0$?

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n$$



i alla dessa punkter kan vi alltså ha extrempunkter

Deriverar en gång till

$$f''(x) = -\sin x$$

lokalt max $\Leftarrow f''\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 < 0$

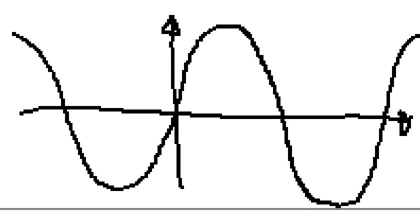
lokalt min $\Leftarrow f''\left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right) = -\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 1 > 0$

Ex: (kurvritning)

$f(x) = \sin x$, $f'(x) = \cos x$

$f''(x) = -\sin x$

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π		$\frac{5\pi}{2}$
f		$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$	
f'	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0
f''	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
				konkav				konvex					

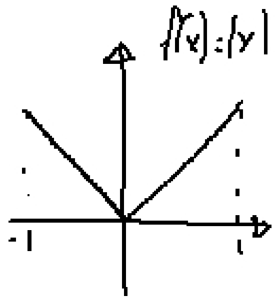


Sats: Om x_0 är ett lokal extrempunkt till funktionen f definierad i intervallet $[a,b]$, så gäller ett av följande

i) $f'(x_0) = 0$

ii) x_0 är en av ändpunkterna, dvs $x_0 = a$ eller $x_0 = b$.

iii) f är ej deriverbar i x_0



största värdet 1 antas i $x=1$ och $x=-1$.

$f'(x) = -1 \quad x<0$

$f'(x) = 1 \quad x>0$

så $f'(x)$ blir aldrig 0

Men $x=0$ är minimipunkt

Ex: $f(x) = \sin x + |x| \quad [0,\pi]$

$$f'(x) = \begin{cases} \cos x + 1 & x > 0 \\ \cos x - 1 & x < 0 \end{cases}$$

i $x=0$ finns ingen derivata.

Största och minsta värdena antas i punkter som uppfyller

i) $f'(x_0)=0$

ii) ändpunkter, dvs $x=0$ och $x=\pi$

iii) punkter där derivatan ej existerar

ii) $f(0) = \sin 0 + |0| = 0$

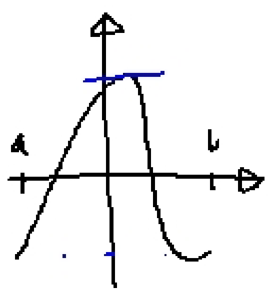
$f(\pi) = \sin\pi + |\pi| = \pi$

iii) Derivatan existerar för alla inre punkter

i) För vilka x gäller $f'(x)=0$? I intervallet är $f'(x) = \cos x + 1$ så $f'(x)=0 \Rightarrow \cos x = -1 \Rightarrow x=\pi$ ändpunkt

$\Rightarrow$ Största värdet i $x=\pi$, $f(\pi)=\pi$
minsta värdet i $x=0$, $f(0)=0$

Rolles sats: Om f är deriverbar i det öppna intervallet (a,b) och kontinuerlig i $[a,b]$ och $f(a)=f(b)$ så har derivatan minst ett nollställe i intervallet.



Bevis: f kontinuerlig på $[a,b]$
$\Rightarrow$ f antar största och minsta värde i intervallet

Det inre av intervallet $[a,b]$ är (a,b)

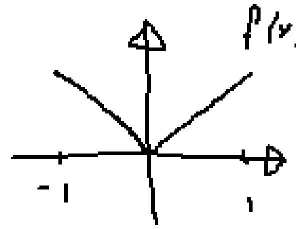
i) Om största eller minsta värdet antas i det inre av intervallet vet vi att derivatan där är noll.

ii) Största och minsta värdena antas i ändpunkterna.

forts ii) Men $f(a) = f(b)$ så största och minsta vi det är lika. Alltså är f konstant.

För konstanta funktioner gäller $f'(x) = 0$.

Ex:



$f(x) = |x|$ $f'(x)$ aldrig 0

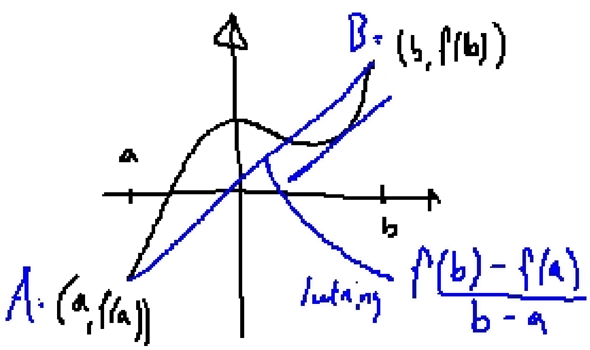
$f(-1) = f(1) = 1$

f ej deriverbar i $x = 0$.

Medelvärdessatsen:

Om f är deriverbar i (a,b) och kontinuerlig i $[a,b]$ så finns ett tal ξ "ksi" i intervallet (a,b) så att

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$$



Satsen säger att det finns en punkt på intervallet där tangenten har samma lutning som sträckan AB.

Bevis: För att vrida figuren rätt sätter vi

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{(f(b)-f(a))}{b-a}(x-a).$$

Då gäller

$$F(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(a-a) = 0$$

$$F(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{\cancel{b-a}}\cancel{(b-a)} = 0$$

Så för F är värdena i ändpunkterna lika. F är också deriverbar där f är deriverbar och kontinuerlig på $[a,b]$. Rolles sats säger så att det finns en punkt ξ, där $F'(\xi) = 0$.

Vi hade

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

så

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

$$0 = F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$\Longrightarrow f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$