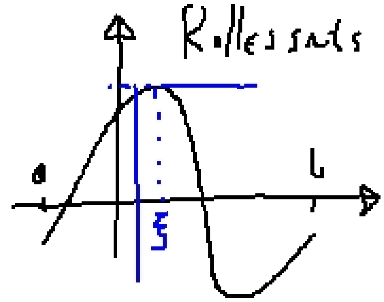
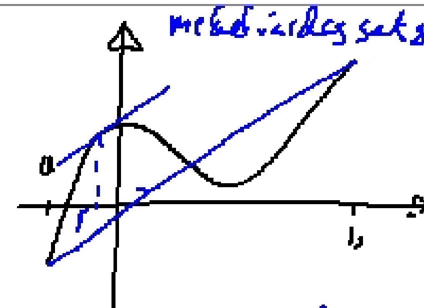
Rolles sats



$$f'(\xi) = 0$$

medelvärdessatsen



$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$$

bevis av $f'(x) \geq 0 \Rightarrow f$ växande

$f'(x) > 0 \Rightarrow f$ strängt växande.

Om $f'(x) \geq 0$ för alla x i intervallet (a,b) så gäller det att om $\overset{u-v>0}{u,v}$ är två punkter i intervallet får vi:

$$f(u) - f(v) = f'(\xi)(u-v) \quad \text{för någon punkt } \xi.$$

$$f(u) - f(v) = f'(\xi)(u - v)$$

för någon punkt ξ mellan u och v
enligt medelvärdessatsen
Men ξ ligger i intervallet (a,b)
så $f'(\xi) \overset{>}{\geq} 0$. Allså

$$f(u) - f(v) = f'(\xi)(u - v) \overset{>}{\geq} 0.$$

dvs f är strängt växande (u, v godtyckliga)

Ex: Om $0<r<1$ så är

$$(1+x)^r < 1 + rx \quad \text{för } x>0$$

Sätt $f(x) = (1+x)^r$ f är kontinuerlig och deriverbar i intervallet $[0,x]$.

Vi har enligt medelvärdessatsen att $f(x) - f(0) = f'(\xi)(x-0)$ för något ξ i intervallet $(0,x)$, dvs

$$(1+x)^r - 1 = r(1+\xi)^{r-1} x < rx$$

för $\xi>0$

$$\Rightarrow (1+x)^r < 1 + rx$$

$0<r<1 \Rightarrow r-1<0 \Rightarrow (1+\xi)^{r-1}<1$ då $\xi>0$

Ex: Ekvationen $x^3+x-1=0$ har precis en reell rot.

$\lim_{x\to\infty} x^3+x-1=\infty$ $\lim_{x\to-\infty} x^3+x-1=-\infty$

x^3+x-1 måste alltså vara >0 för stora $x>0$ och <0 för x mycket negativa.

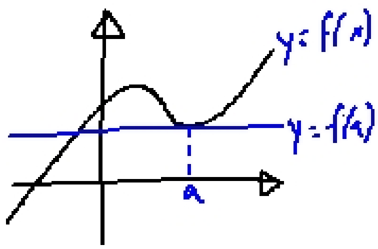
Kontinuerliga funktioner antar alla mellanliggande värden så x^3+x-1 måste bli noll i någon punkt. Vi har alltså åtminstone en reell rot.

Återstår att visa att det inte finns fler rötter

$$D(x^3 + x - 1) = 3x^2 + 1 > 0$$

$\Rightarrow$ $x^3 + x - 1$ är strängt växande. $\Rightarrow$ högst ett nollställe.

Taylors formel



0:e ordningen

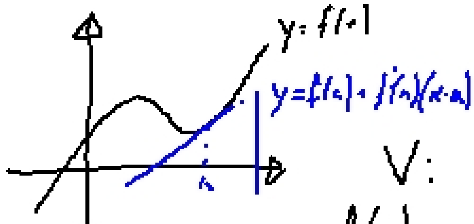
Vi approximerar funktionen f med dess värde i a,

$y = f(a) = p_0(x)$.

Värdet i punkten x=a stämmer överens. Felet

$$R_0(x) = f(x) - p_0(x) = f(x) - f(a) =$$

$$= f'(\xi)(x-a)$$ där ξ ligger mellan x och a.



Första ordningen

Vi approximerar $f(x)$ med $p_1(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$.

Vi ser att $f(a) = p_1(a)$ men också att $p_1'(a) = f'(a)$. Felet $R_1(x) = f(x) - p_1(x)$, kan uppskattas genom att betrakta hjälpfunktionen

$$F_1(t) = R_1(t)(x-a)^2 - R_1(x)(t-a)^2.$$

$$\frac{dF_1}{dt}(t) = R_1'(t)(x-a)^2 - 2R_1(x)(t-a)$$

$$\frac{d^2F_1}{dt^2}(t) = R_1''(t)(x-a)^2 - 2R_1(x) = f''(t)(x-a)^2 - 2R_1(x)$$

	a	c	b	x
F_1	0			0
F_1'	0		0	
F_1''		0		

$$F_1(t) = R_1(t)(x-a)^2 - R_1(x)(t-a)^2$$

$$F_1(a) = R_1(a)(x-a)^2 = (f(a)-p_1(a))(x-a)^2 = 0$$

$$F_1(x) = R_1(x)(x-a)^2 - R_1(x)(x-a)^2 = 0$$

Så F_1 är noll i ändpunkterna a, x så Rolles sats säger så att det finns någon punkt, b, mellan a och x så att $F_1'(b) = 0$.

$$F_1'(a) = R_1'(a)(x-a)^2 = (f'(a)-p_1'(a))(x-a)^2 = 0$$

Rolles sats, tillämpad på F_1', ger nu att $F_1''(c) = 0$ för någon punkt c mellan a och b.

Vi har kommit fram till

att $F_1''(c) = 0$ men

$$0 = F_1''(c) = f''(c)(x-a)^2 - 2R_1(x)$$

$$\Rightarrow \quad R_1(x) = f''(c)\frac{(x-a)^2}{2}.$$

Ex: $f(x) = \sin x$. Vi utvecklar kring $x=0$.

$f(0) = 0$, $f'(0) = \cos 0 = 1$ så

$P_1(x) = 0 + 1 \cdot x = x$, dvs

vi approximerar $\sin x$ med x.

Felet blir $|R_1(x)| = \left|f''(c)\frac{x^2}{2}\right| = \left|-\sin c \frac{x^2}{2}\right| \leq \frac{x^2}{2}$

$$|\sin 0{,}1 - 0{,}1| \le \frac{0{,}1^2}{2} = 0{,}005$$

$$|\sin 1 - 1| \le \frac{1}{2}$$

<u>Sats (Taylors formel)</u> Om f har derivator upp till och med ordning $n+1$ så gäller det att

$$f(x) = \overbrace{f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!}}^{P_n(x)} + \overbrace{f^{(n+1)}(\xi)\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}}^{R_n(x)}$$

där ξ är ett tal mellan a och x.

(Bevisas som tidigare med hjälpfunktion
$F_n(t) = R_n(t)(x-a)^{n+1} - R_n(x)(t-a)^{n+1}$. Det viktiga
är att $D^{n+1} p_n(x) = 0$ och att $R_n^{(i)}(a) = 0$ $i = 0, \dots, n$)

Speciellt $a=0$

MacLaurins formel:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2} + \dots + f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} +$$

$$+ f^{(n+1)}(\xi)\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$ där ξ ligger mellan 0 och x.

Vi kan också visa Taylors formel från MacLaurins formel genom att sätta $g(t) = f(t+a)$. MacLaurins formel ger

$$g(t) = g(0) + \dots + g^{(n)}(0)\frac{t^n}{n!} + g^{(n+1)}(\xi)\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$f(t+a) = f(a) + \dots + f^{(n)}(a)\frac{t^n}{n!} + f^{(n+1)}(\xi)\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}$$

Sätt nu $x = t + a$, dvs $t = x - a$

$$f(x) = f(a) + \dots + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!} + f^{(n+1)}(\xi)\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Ex: $f(x) = \sin x$, $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$

$f^{(3)}(x) = -\cos x$, $f^{(4)}(x) = \sin x$

$\Rightarrow f^{(4n)}(x) = \sin x$, $f^{(1+4n)}(x) = \cos x$, $f^{(2+4n)}(x) = -\sin x$

7:e ordningens MacLaurinutveckling

$f^{(3+4n)}(x) = -\cos x$.

$$\sin x = f(x) = f(0) + \dots + f^{(7)}(0)\frac{x^7}{7!} + f^{(8)}(\xi)\frac{x^8}{8!}$$

$$= 0 + x + 0 - \frac{x^3}{3!} + 0 + \frac{x^5}{5!} + 0 - \frac{x^7}{7!} + \sin\xi\,\frac{x^8}{8!}$$

$$\left|\sin 1 - 1 + \frac{1}{3!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{7!}\right| \leq \left|\sin\xi\,\frac{1}{8!}\right| \leq \frac{1}{8!}$$